Funkcije

Def.: Funkcija je predpis, ki vsakemu elementu iz množice D_f priredi element iz množice B, katere podmnožica je zaloga vrednosti funkcije Z_f.

Funkcija $y = f(x)$ je **injektivna**, v primeru da iz dveh različnih vrednosti v definicijskem območju dobimo dve različni vrednosti v zalogi vrednosti.
Funkcija $y = f(x)$ je **surjektivna,** če slike elementov predstavljajo vso množico R.
Funcija je $y = f(x)$ **bijektivna**, če injektivna in surjektivna hkrati.

Dve funkciji f in g sta enaki, kadar imata enaki definicijski območji $D_f = D_g = D$ in za vsak $x \in D$ velja $f(x) = g(x)$.

Monotone funkcije

Def.: Funkcija $y = f(x)$ je naraščajoča, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \leq f(x_2)$. Če je funkcija $f(x_1) < f(x_2)$, je strogo naraščajoča.
Funkcija $y = f(x)$ je padajoča, če za poljubni števili $x_1 < x_2$ iz definicijskega območja funkcije f velja, da je tudi $f(x_1) \geq f(x_2)$. Če je funkcija $f(x_1) > f(x_2)$, je strogo padajoča.
Funkcija je monotona, če je padajoča ali naraščajoča in strogo monotona, če je strogo padajoča ali strogo naraščajoča.

Sode in lihe funkcije

Def.: Funkcija $f: D \to R$ je soda, če je $f(x) = f(-x)$ za vsak $x \in D$. Funkcija $f: D \to R$ je liha, če je $f(x) = -f(-x)$ za vsak $x \in D$.

Graf sode funkcije je krivulja, ki je simetrična glede na os y. Graf lihe funkcije pa je simetričen glede na izhodišče kooridnatnega sistema.

Trditev: Vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih funkcij je liha funkcija. Produkt in kvocient dveh sodih ali dveh lihih funkcij sta sodi funkciji, produkt in kvocient sode in lihe funkcije pa sta lihi funkciji.

Zvezne funkcije

Def.: Funkcija f je v točki x_0 zvezna, če lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo tak $\delta > 0$, da je $|\Delta y| = |f(x_0 + h) - f(x_0)| < \varepsilon$, če je $|h| < \delta$.

Limita

Def.: Naj bo funkcija f definirana na intervalu (a,b), razen v eni točki $\xi \in (a,b)$. Pravimo, da funkcija konvergira k vrednosti l, ko gre x proti ξ, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - l| < \varepsilon$, če je le $|\xi - x| < \delta$.

Def.: Funkcija f, definirana na intervalu (a,b), konvergira z leve k vrednosti l, ko x narašča proti b, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - l| < \varepsilon$, če je $b - \delta < x < b$. Število l je leva limita funkcije f v točki b, kar zapišemo $\lim_{x \to b} f(x) = l$.

Kriterij za zveznost funkcije

Trditev: Funkcija f(x) je v točki ξ zvezna natanko takrat, kadar je v tej točki definirana in je $\lim_{x \to \xi} f(x) = f(\xi)$.

Trditev: Funkcija f(x) definirana na intervalu (a,b), je v točki $\xi \in (a,b)$ zvezna natanko takrat, kadar je $\lim_{h \to 0} \Delta y = \lim_{h \to 0} (f(\xi + h) - f(\xi)) = 0$, torej, kadar gre prirastek Δy odvisne spremenljivke proti 0, ko gre prirastek h neodvisne spremenljivke proti 0.

Izrek: Če je funkcija f(x) injektivna (tj. obstaja inverzna funkcija f^{-1}) in zvezna v točki $x = \xi$, je inverzna funkcija $f^{-1}(y)$ zvezna v točki $y = f(\xi)$.

Zveznost funkcij na intervalu

Def.: Funkcija f(x) je zvezna na odprtem intervalu (a,b), če je zvezna v vsaki točki $x \in (a,b)$. Funkcija f(x) je zvezna na zaprtem intervalu [a,b], če je zvezna na odprtem intervalu (a,b), zvezna z desne v točki a in zvezna z leve v točki b.

Def.: Funkcija f je na intervalu [a,b] enakomerno zvezna, če vsakemu $\varepsilon > 0$ pripada tak $\delta > 0$, da je neenačba $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ izpolnjena za vse take x_1, x_2 z intervala [a,b], za katere je $| x_2 - x_1 | < \delta$.

Izrek: Če je funkcija v vsaki točki zaprtega intervala [a,b] zvezna, je na tem intervalu enakomerno zvezna.

Def.: Funkcija f je na množici A omejena, če je slika $f(A) = \{f(x), x \in A\} \subseteq R$ omejena množica.

Izrek: Funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na tem intervalu omejena.
Izrek: Funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu [a,b], zavzame v neki točki $x_m \in [a,b]$ svojo natančno spodnjo mejo m in v neki točki $x_M \in [a,b]$ svojo natančno zgornjo mejo M.

Izrek: (Izrek o vmesnih vrednostih) Funkcija f, ki je zvezna na zaprtem intervalu [a,b], zavzame na tem intervalu vsako vrednost med svojo natančno spodnjo mejo m in natančno zgornjo mejo M.