Funkcije dveh in več spremenljivk

Def.: Funkcija dveh spremenljivk je preslikava, ki vsaki točki (x,y) ravninske množice D priredi realno število z = f(x,y), torej $f : D \subset R^2 \to R$

Funkcija treh spremenljivk je preslikava, ki vsaki točki r = (x,y,z) prostorske množice $D \subset R^3$ priredi realno število u = f(x,y,z), torej preslikava $f: D \subset R^3 \to R$

Funkcija n spremenljivk priredi vsaki točki $x = (x_1,x_2,\dots x_n)$ podmnožice $D \subset R^n$ realno število y = f(x) = $f(x_1,x_2,\dots x_n)$, torej preslikava $f : D \subset R^n \to R$

Množica D je definicijsko območje funkcije f.

Def.: Funkcija dveh spremenljivk f(x,y) je v točki (a,b) iz definicijskega območja D zvezna, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - f(a,b)| < \varepsilon$, za vsak $(x,y) \in D$, ki je od točke (a,b) oddaljen za manj kot δ, tj. $(x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$
Na splošno: funkcija n spremenljivk $f(x) = f(x_1,\dots x_n)$ je v točki $a = (a_1,\dots a_n) \in D$ zvezna, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x_1,\dots x_n) - f(a_1,\dots a_n)| < \varepsilon$, za vsak $x \in D$, ki je od a oddaljen za manj kot δ, tj. $(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2$

Izrek: Funkcija f je v točki $a = (a_1,\dots a_n)$ zvezna natanko takrat, kadar je $\lim\limits_{x\to a} f(x_1,\dots x_n) = f(a_1,\dots a_n)$.

Def.: Število l je limita funkcije f(x,y), ko gre točka (x,y) proti točki (a,b) $l = \lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$, če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - l| < \varepsilon$, če je $0 < (x - a)^2 + (y - b)^2 < \delta^2$.
Na splošno: število l je limita funkcije $f(x) = f(x_1,\dots x_n)$, ko gre x proti $a = (a_1,\dots a_n)$, $l = \lim\limits_{x\to a} f(x_1,\dots x_n)$ če obstaja za vsak $\varepsilon > 0$ tak $\delta > 0$, da je $|f(x_1,\dots x_n) - l| < \varepsilon$, če je x oddaljen od a za manj kot δ: $0 < (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2$.

Def.: Funkcija f(x,y) je enakomerno zvezna na neki množici $D \subset R^2$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$, za vsak par točk (x,y) in (x',y') iz D, za katerega velja $(x - x')^2 + (y - y') < \delta^2$.

Funkcija n spremenljivk $f(x) = f(x_1,\dots x_n)$ je enakomerno zvezna na množici $D \subset R^n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(x')| = |f(x_1,\dots x_n) - f(x'_1,\dots x'_n)| < \varepsilon$ za vsak par točk x in x', ki zadoščata pogoju $(x_1 - x'_1)^2 + \dots + (x_n - x'_n)^2 < \delta^2$.

Parcialni odvodi

Def.: Če obstaja limita diferenčnega kvocienta $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f_1(x+h) - f_1(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$, jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x in označimo z $\frac{\partial f}{\partial x}$ ali $f_x(x,y)$. Če obstaja $\lim\limits_{k\to 0} \frac{f(x,y+k) - f(x,y)}{k}$, jo imenujemo parciali odvod funkcije f po spremenljivki y in označimo z $\frac{\partial f}{\partial y}$ ali $f_y(x,y)$.

Def.: Če obstaja limita $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_1,\dots x_i + h,\dots x_n) - f(x_1,\dots x_i,\dots x_n)}{h}$ jo imenujemo parcialni odvod funkcije f po spremenljivki x_i in označimo z $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ali $f_{x_i}(x,y)$.

Totalni difernecial

Def.: Funkcija dveh spremenljivk z = f(x,y) je v točki (a,b) diferenciabilna, če obstajata oba parcialna odvoda A = $f_x(a,b)$ in B = $f_y(a,b)$ in je $\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,a+k)-f(a,b)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$.

Izraz dz = Ah + Bk = $f_x(a,b)h + f_y(a,b)k$ imenujemo totalni diferencial.
Podobno je funkcija n > 2 spremenljivk y = f(x) = f(x_1,…x_n) v točki a = (a_1,…a_n) diferenciabilna, natanko tedaj, kadar obstajajo vsi parcialni odvodi $A_i = f_{xi}(a_1,\ldots a_n)$, i = 1, …, n in je

$\lim\limits_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(a+h,a+k)-f(a,b)-(Ah+Bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$, izraz $dy = A_1 h_1 + \ldots + a_n h_n = f_{x_1} h_1 + \ldots + f_{x_n} h_n$ pa je totalni diferencial.

Izrek: Zvezna funkcija z = f(x,y) je diferenciabilna, če sta parcialna odvoda $f_x(x,y)$ in $f_y(x,y)$ zvezna.

Smerni odvod

Def.: Smerni odvod funkcije f v točki (a,b) v smeri vektorja v je $f_v = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+hv_1, b+hv_2)-f(a,b)}{h}$

Smerni odvod funkcije f v smeri vektorja v je torej enak odvodu funkcije f vzdolž premice x(t) = a + v_1t , y(t) = b + v_2t skozi (a,b) s smernim vektorjem v dolžine 1 in meri hitrost, s katero se spreminja vrednost funkcije f, če se iz točke (a,b) pomaknemo v smeri vektorja v. Če pišemo z(t) = f((x(t),y(t)), je f(a,b) = z(0). Iz formule za posredno odvajanje sledi, da je

$$\frac{dz}{dt} = v_1 f_x(x(t), y(t)) + v_2 f_y(x(t), y(t))$$

V dobljeni izraz vstavimo t = 0 in dobimo formulo za računanje smernega odvoda

$$f_v(a,b) = \frac{dz}{dt} = v_1 f_x(a,b) + v_2 f_y(a,b) = grad f(a,b) v .$$

Trditev: Naj bo (a,b) nestacionarna točka funkcije f, tako da je vektor grad f(a,b) neničeln. Smerni odvod $f_v(a,b)$ ima največjo vrednost takrat, kadar ima enotski vektor v smer gradienta grad f(a,b)

Trditev: Spet naj bo (a,b) nestacionarna točka funkcije f in naj bo vektor v pravokoten na vektor grad f(a,b). Vektor v v tem primeru kaže iz točke (a,b) v smeri tangentnega vektorja na nivojsko krivuljo funkcije f v točki (a,b).

Višji parcialni odvodi in Taylorjeva formula

Izrek: Če druga mešana parcialna odvoda f_{xy} in f_{yx} obstajata in sta zvezni funkciji, sta enaka.

Izrek: (Taylorjeva formula) Funkcije f(x,y) naj bo (n+1)-krat zvezno parcialno odvedljiva na obe spremenljivki v okolici točke (a,b). Potem velja:

$$f(a+h,b+k) = f(a,b) + \left[f_x(a,b)h + f_y(a,b)k\right] + \frac{1}{n!}\left[\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{\partial^n f}{\partial^{n-i} x \partial^i y}(a,b) h^{n-i} k^i\right] + R_n$$

kjer je $R_n = \frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} \frac{\partial^{n+1} f}{\partial^{n+1-i} x \partial^i y}(a+\theta h, b+\theta k) h^{n+1-i} k^i\right]$ in $0 \le \theta \le 1$.

Izrek 3.3.6. (Taylorjeva formula drugega reda) Če je a notranja točka množic $D \subseteq R^n$ in je funkcija $f : D \to R$ vsaj trikrat zvezno parcialno odvedljiva, je $f(a+h) = f(a_1+h_1, \ldots a_n+h_n)$

$$= f(a) + grad f(a) \cdot h + \frac{1}{2!}(h^T H(a) h) + R_3$$

kjer se ostanek R_3 izraža s tretjimi parcialnimi odvodi funkcije f v neki vmesni točki y = a + ϑh na daljici med a in a + h in je $\lim_{h\to 0}\frac{R_3}{|h|^3} = \lim_{h\to 0}\frac{R_3}{\sqrt{(h_1^2+...+h_n^2)^3}} = 0$.

Implicitne funkcije

Izrek: (Izrek o implicitni funkciji v dveh dimenzijah) Naj bo F(x,y) zvezna in difereniabilna funkcija v okolici točke (a,b) in naj bo F(a,b) = 0. Če je $F_y(a,b) \neq 0$, obstaja odvedljiva funkcija y = y(x), ki je definirana v neki okolici točke a ∈ R in zadošča pogojema: y(a) = b F(x,y(x)) = 0.
Izrek 3.4.2. (Izrek o implicitni funkciji v treh dimenzijah) Naj bo F(x,y,z) diferciabilna funkcija in F(a,b,c) = 0. Če velja, da je $F_z(a,b,c) \neq 0$, potem obstaja funkcija z = z(x,y), ki je definirana v okolici točke (a,b) in zadošča pogojem z(a,b) = c, F(x,y,z(x,y)) = 0 (3.8).

Parcialna odvoda funkcije z(x,y) dobimo s posrednim odvajanjem enačbe (3.8): $F_x+F_z z_y = 0$, torej $z_x = -\frac{F_x}{F_z}$ in

$z_y = -\frac{F_y}{F_z}$.

Izrek: Diferenciabilni funkciji F(x,y,z) in G(x,y,z), ki imata v točki (a,b,c) hkrati vrednost 0, določata implicitni funkciji y = y(x) in z = z(x), če je determinanta $D = \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} \neq 0$. Funkciji y = y(x) in z = z(x) sta definirani v okolici točke a∈ R in velja: y(a) = b, z(a) = c, F(x, y(x), z(x)) = G(x, y(x), z(x)) = 0.

Ekstremi in stacionarne točke

Def.: Zvezna funkcija dveh spremenljivk f(x,y) zavzame v točki (a,b) lokalni maksimum, če obstaja tak δ, da je f(a + h, b + k)-f(a,b) < 0 za vsak (h,k), ki zadošča pogoju $h^2 + k^2 < \delta$, in lokalni minimum, če je f(a + h, b + k)-f(a,b) > 0 za vsak (h,k), ki zadošča pogoju $h^2 + k^2 < \delta$.

Def.: Točka (a,b), v kateri je $f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$, je stacionarna točka (ali kritična točka) funkcije f(x,y). Točka a = $(a_1,\ldots a_n)$ je stacionarna točka funkcije n spremenljivk f(x) = $(x_1,\ldots,x_n)$, če so vsi prvi parcialni odvodi v tej točki enaki 0: $f_{x1}(a) = \ldots = f_{xn}(a) = 0$.

Potreben pogoj za nastop ekstrema pove:
Izrek: Če zavzame diferenciabilna funkcija f(x,y) v točki (a,b) lokalni ekstrem, je (a,b) stacionarna točka. Podobno, če zavzame diferneciabilna funkcija f(x) = $(x_1,\ldots,x_n)$ v točki a = $(a_1,\ldots a_n)$ ekstrem, je a stacionarna točka.

Izrek: (Zadosten pogoj za nastop ekstrema) Točka (a,b) naj bo stacionarna točka dvakrat zvezno parcialno odvedljive funkcije f(x,y), naj bodo A = $f_{xx}(a,b)$ B = $f_{xy}(a,b)$ C = $f_{yy}(a,b)$ vrednosti parcialnih odvodov funkcije f v tej točki in $H(a,b) = \begin{bmatrix} AB \\ BC \end{bmatrix}$ matrika drugih parcialnih odvodov. Potem velja:

1. če je det H(a,b) = AC – B^2 > 0, je v točki (a,b) lokalni minimum, kadar je A > 0, in lokalni maksimum, kadar je A < 0
2. če je det H(a,b) < 0, je v točki (a,b) sedlo
3. če je det h(a,b) = AC – B^2 = 0 pa na podlagi drugih parcialnih odvodov običajno o obstoju ekstrema ne moremo sklepati

Vezani ekstremi

Naj bo funkcija f(x,y) definirana na območju d ⊆ R^2 in g(x,y) = 0 implicitna enačba neke krivulje v D. Vezani ekstrem je ekstrem funkcije f(x,y) na množici točk, ki zadošča pogoju g(x,y) = 0. Drugače povedano, vezani ekstrem je ekstrem funkcije f nad dano krivuljo.

Izrek: Vezani ekstremi funkcije f pri pogojih $g_1 = 0, \ldots, g_k = 0$ nastopijo med stacionarnimi točkami Lagrangeove funkcije L, torej med točkami, ki so rešitve sistema

$L_{x1} = f_{x1} - \lambda_1 g_{x1} - \ldots \lambda_k g_{x2} = 0$
.
.
.
$L_{xn} = f_{xn} - \lambda_1 g_{x1} - \ldots \lambda_k g_{xn} = 0$
$L_{\lambda 1} = -g_1 = 0$
.
.
.
$L_{\lambda k} = -g_k = 0$
S pomočjo Lagrangeove funkcije poiščemo tiste točke, ki so kandidati za vezane ekstreme.