Funkcijske vrste

Konvergenca funkcijskih vrst

Def.: Območje konvergence funkcijske vrste je $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ (2.1),

množica tistih točk x ∈ (a,b), kjer je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x_0) = u_0(x_0) + u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots$ (2.2) konvergentna.

Def.: Funkcijska vrsta (2.1) je enakomerno konvergentna na množici D ⊂ R, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks N, da je za vsak m > N, $| S(x) - S_m(x) | < \varepsilon$ pri vsakem x ∈ D.

Def.: Če je $a_0 + a_1 + \ldots + a_n + \ldots$ (2.3) številska vrsta s pozitivnimi členi in če za vsak x ∈ D in za vsak n velja $| u_n(x) | \le a_n$ pravimo, da je vrsta (2.3) številska majoranta funkcijske vrste (2.1)

Izrek: Funkcijska vrsta, ki ima na množici D ⊂ R konvergentno številsko majoranto, je na D enakomerno konvergentna.

Izrek: Če je vrsta $u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ enakomerno konvergentna na nekem intervalu I, členi $u_n(x)$ pa so zvezne funkcije na tem intervalu, je tudi vsota $S(x) = u_0(x) + u_1(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ zvezna funkcija na I.

Izrek: Enakomerno konvergentno vrsto s členi, ki so zvezne funkcije na intervalu [a,b], in vsoto S(x), lahko na tem intervalu členoma integriramo: $\int_a^b S(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b u_n(x)dx$.

Izrek: Če so členi $u_n(x)$ konvergentne funkcije na intervalu [a,b] in je vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ enakomerno konvergentna na [a,b], je $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) = \sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$ torej smemo vrsto členoma odvajati.

Potenčne vrste

Def. : Funkcijsko vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (2.5) imenujemo potenčna vrsta okrog točke x_0. Števila $a_n \in R$ so koeficienti potenčne vrste.

Izrek: Če je potenčna vrsta (2.5) konvergentna v točki $x_1 \neq x_0$, je absolutno konvergentna za vsak x, kjer je $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$. Če je potenčna vrsta (2.5) divergentna v točki x_2, je divergentna v vsaki točki x, kjer je $|x - x_0| > |x_2 - x_0|$.

Def. : Če obstaja tako največje število R, da je potenčna vrsta (2.5) absolutno konvergentna za vsak x, kjer je $|x - x_0| < R$ in divergentna za vsak x, kjer je $|x - x_0| > R$, je število R konvergenčni polmer vrste. Če je vrsta absolutno konvergentna za vsak x ∈ R, pa je njen konvergenčni polmer $R = \infty$. Če je vrsta konvergentna samo v točki x_0, je njen konvergenčni polmer R = 0.

Trditev: Če obstaja $L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq 0$, je konvergenčni polmer vrste (2.5) enak R = 1/L, torej je

$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ če je L = 0, je R = ∞.

Izrek: Potenčna vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ s konvergenčnim polmerom R je enakomerno konvergentna na vsakem zaprtem intervalu $[x_0 - r, x_0 + r]$, kjer je $0 < r < R$.

Izrek: Vsota potenčne vrste f(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ je zvezna funkcija na odprtem intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$, kjer je R konvergenčni polmer vrste.

Izrek: Če potenčno vrsto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ s konvergenčnim polmerom R in vsoto f(x) členoma odvajamo,

dobimo potenčno vrsto z enakim kovnergenčnim polmerom R in vsoto f'(x)= $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^{n-1}$.
Nedoločeni integral funkcije f(x) se izraža kot vsota potenčne vrste

$\int_{x_0}^{x} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{x_0}^{x} a_n (x - x_0)^m dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x - x_0)^{n+1}$ z istim konvergenčnim polmerom R.

Izrek: Funkcija f(x), ki se izraža kot vsota potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ (2.11) s konvergenčnim polmerom R, je zvezna in neskončno krat odvedljiva na intervalu $(x_0 - R, x_0 + R)$. Za vsak $n \in N$ ji n-ti odvod $f^{(n)}(x)$ vsota potenčne vrste, ki jo dobimo, če vrsto (2.11) n-krat členoma odvajamo. Koeficienti a_n vrste (2.11) so natanko določeni z vrednostjo funkcije f in njenih odvodov v točki x_0 in so enaki $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n \in N$.
Drugače povedano, vrsta (2.11) je Taylorjeva vrsta funkcije f(x) okrog točke x_0

Izrek: (Abelov izrek) Če je potenčna vrsta okrog točke x_0 s konvergenčnim polmerom R v krajišču $x_0 - R$ oziroma $x_0 + R$ konvergentna, je njena vsota v tem krajišču zvezna z desne oziroma leve.

Trigonometrične vrste

Vrsti oblike $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ pravimo trigonometrična vrsta. Členi trigonometrične vrste so periodični s periodo 2π. Če je vrsta konvergentna, je torej tudi njena vsota periodična funkcija s periodo 2π.

Def.: Vrsti $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ s koeficienti

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx$$
pravimo trigonometrična Fourierjeva vrsta funkcije f(x).

Izrek: (Izrek o konvergenci Fourierjeve vrste) Če je periodična funkcija f(x) s periodo 2π odsekoma zvezna na intervalu [-π,π] in ima v vsaki točki tega intervala levi in desni odvod, je njena Fouierjeva vrsta konvergentna. Njena vsota je enaka f(x) v vsaki točki x, kjer je f zvezna. V točkah nezveznosti pa je vsota Fourierjeve vrste enaka povprečni vrednosti leve in desne limite. Za vsak x ∈ [-π,π] torej velja:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0)).$$

Sinusna in kosinusna Fourierjeva vrsta

Izrek: Fourierjeva vrsta sode funkcije f(x) s periodo 2a je $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{a}$ (2.24) kjer je

$$a_0 = \frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx, \qquad a_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\frac{n\pi x}{a}dx.$$

Fourierjeva vrsta lihe funkcije f(x) s perodo 2a pa je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{a}$ (2.25) kjer je

$$b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx.$$
Vrsto (2.24) imenujemo kosinusna Fourierjeva vrsta, vrsto (2.25) pa sinusna Fourierjeva vrsta.

Fourierjev integral

Izrek: Če je funkcija f(x) odsekoma zvezna na vsakem končnem intervalu, v vsaki točki x ∈ R pa ima levi in desni odvod, in če je absolutno integrabilna na R, tako da $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx$ obstaja, obstaja tudi njen Fourierjev integral. V točkah x, kjer je f(x) zvezna, je Fourierjev integral enak funkcijski vrednosti f(x). V točkah nezveznosti pa je Fourierjev integral enak povprečni vrednosti leve in desne limite.