

## Integral

**Def.:** Funkcijo  $F$ , katere odvod je enak  $f$ , imenujemo nedoločeni integral funkcije  $f$  in pišemo  $F(x) = \int f(x)dx$ .

**Izrek:** Če je  $f$  kak nedoločeni integral funkcije  $f$ , dobimo vsak drug njen integral tako, da funkciji  $F$  prištejemo konstanto.

$$I_1 = \sup S_D \quad I_2 = \inf S_D$$

**Def.:** Funkcija  $f$  je integrabilna na intervalu  $[a,b]$ , če je  $I_1 = I_2$ . Število  $I = I_1 = I_2$  imenujemo določeni integral funkcije  $f$  na intervalu  $[a,b]$  in pišemo  $I = \int_a^b f(x)dx$ .

**Izrek:** Funkcija  $f$  je integrabilna na intervalu  $[a,b]$ , če za vsak  $\varepsilon > 0$  obstaja taka delitev  $D$  intervala, da je  $S_D - s_D < \varepsilon$ .

**Izrek:** Funkcija, ki je zvezna na intervalu  $[a,b]$ , je na tem intervalu tudi integrabilna.

**Izrek:** Če je funkcija  $f$  na intervalu  $[a,b]$  odsekoma zvezna, je integrabilna.

**Izrek:** Vsaka monotona funkcija je integrabilna.

**Izrek: (Izrek o povprečni vrednosti)** Če je  $f$  zvezna na intervalu  $[a,b]$ , obstaja vsaj ena točka  $c \in [a,b]$ , kjer je

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = P$$

Povprečna vrednost integrabilne funkcije  $f$  na intervalu  $[a,b]$  je število  $P = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$ .

### *Zveza med določenim in nedoločenim integralom*

**Izrek:** Funkcija  $F(x)$ , definirana s predpisom  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , je zvezna na  $[a,b]$ . Drugače povedano: določeni integral je zvezna funkcija zgornje meje.

**Izrek: (Osnovni izrek integralnega računa)** Funkcija  $F(x)$ , definirana z enačbo  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ , je

odvedljiva na intervalu  $[a,b]$ , njen odvod je  $F'(x) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ .

Drugače povedano: določeni integral  $F(x)$  kot funkcija zgornje meje je nedoločeni integral funkcije  $f(x)$ .

**Izrek:** Vsaka zvezna funkcija ima nedoločeni integral.

**Izrek: (Newton-Leibnizeva formula)** Če je  $f$  zvezna funkcija na intervalu  $[a,b]$  in  $F$  njen poljuben nedoločeni integral, je  $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ .

### *Nepravi (posplošeni) integrali*

$$I(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx \quad (5.38)$$

**Def. 5.6.1.** Če obstaja limita integrala  $I(\varepsilon)$  (5.38), ko  $\varepsilon$