Odvodi

Def.: Funkcija f je v točki x_0 odvedljiva, če obstaja limita diferenčnega kvocienta:
$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$, ki ji pravimo odvod funkcije f v točki x_0.
Odvod $f'(x_0)$ meri hitrost, s katero se vrednost funkcije spreminja v bližini točke x_0.

Izrek: Če je funkcija v neki točki odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna.

Def.: Funkcija f je odvedljiva na odprtem intervalu (a,b), če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a,b)$. Na zaprtem intervalu [a,b] je odvedljiva, če je odvedljiva v vsaki točki $x \in (a,b)$ in če v levem krajišču a obstaja desni odvod, v desnem krajišču b pa levi odvod.

Geometrijski pomen odvoda

$tg\rho_{\Delta x} = \Delta y/\Delta x$…diferenčni kvocient predstavlja smerni koeficient sekante na graf skozi točki $(x_0,f(x_0))$ in $((x_0+h), f(x_0+h))$.

Funkcija f(x) je v točki x_0 odvedljiva natanko takrat, ko obstaja tangenta na graf v točki $(x_0,f(x_0))$, odvod pa je smerni koeficient te tangente.

Funkcija f(x) je v točki x_0 odvedljiva z leve, če obstaja leva limita diferenčnega kvocienta. To limito imenujemo levi odvod.

Funkcija f(x) je v točki x_0 odvedljiva z desne, če obstaja desna limita diferenčnega kvocienta. To limito imenujemo desni odvod.

Funkcija f(x) je v točki x_0 odvedljiva, če obstaja levi in desni odvod in sta enaka. Če nista enaka se graf v tej točki prelomi!

Če je funkcija f(x) v točki x_0 odvedljiva, je v tej točki tudi zvezna, saj je v tem primeru
$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 0$

Diferencial

Odvod f'(x) pogosto označim z dy/dx (y=f(x))

Diferencial funkcije y=f(x) v točki x_0 pri spremembi dx je $df=f'(x_0)dx=tg\rho\, dx=dy$

Diferencial $dy=f'(x_0)dx$ predstavlja spremembo odvisne spremenljivke na tangenti na graf f(x) v točki x_0 pri spremembi neodvisne spremenljivke dx.

Če je dx majhen je $dy \approx \Delta y$
$Dy=f(x_0+dx)-f(x_0)$

Dy je funkcija spremenljivke dx, in sicer linearna funkcija oblike adx $(a=f'(x_0))$

Lokalni ekstremi

Def.: Funkcija f ima v točki c lokalni maksimum, če obstaja tako število $\delta > 0$, da je $f(x) \le f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$.

Če je $f(x) < f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, razen za $x = c$, je v točki c strogi maksimum funkcije f.
Kadar obstaja število $\delta > 0$, za katerega je $f(x) \geq f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, ima funkcija f v točki c lokalni minimum. Če je $f(x) > f(c)$ za vsak $x \in (c-\delta, c+\delta)$, razen za $x = c$, je v točki c strogi minimum funkcije f.

Izrek: (Fermat) Točka c, v kateri ima odvedljiva funkcija f lokalni ekstrem, je kritična točka, torej $f''(x) = 0$.

Odvedljive funkcije na zaprtem intervalu

Izrek: (Rolle) Funkcija f, ki je odvedljiva na zaprtem intervalu [a,b] in ima v krajiščih enaki vrednosti $f(a) = f(b)$, ima na intervalu (a,b) vsaj eno kritično točko.

Izrek: (Lagrange) Če je f odvedljiva funkcija na zaprtem intervalu [a,b], obstaja vsaj ena točka $c \in (a,b)$, kjer je $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Izrek: Funkcija f, ki je na intervalu [a,b] odvedljiva in je njen odvod povsod enak 0, tj. $f'(x) = 0$ za vsak $x \in (a,b)$, je konstanta.

Izrek: Funkciji f_1 in f_2, ki imata povsod na intervalu [a,b] enaka odvoda, se razlikujeta kvečjemu za konstanto: $f_2(x) = f_1(x) + C$

Izrek: (Cauchy) Funkciji f in g naj bosta zvezni na intervalu [a,b], v vsaki notranji točki tega intervala odvedljivi in naj bo $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Potem obstaja število $c \in (a,b)$, da je $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Izrek: (l'Hopital) Naj bosta funkciji f in g definirani in odvedljivi na intervalu (a,b) in $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a,b)$. Če v točki $x_0 \in (a,b)$ velja $f(x_0) = g(x_0) = 0$, je $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ pri pogoju, da limita na desni obstaja.

Monotonost in zadostni pogoji za ekstrem

Izrek: Odvedljiva funkcija je na intervalu [a,b] naraščajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in (a,b)$, in padajoča natanko takrat, kadar je $f'(x) \leq 0$ za vsak $x \in (a,b)$.

Izrek: (Prvi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema) Funkcija f(x) zavzame v kritični točki c lokalni ekstrem natanko takrat, kadar odvod ob prehodu skozi točko c spremeni znak. Če je $f'(x) < 0$ za $x < c$ in $f'(x) > 0$ za $x > c$, je v točki c lokalni minimum, v obratnem primeru pa je v točki c lokalni maksimum.

Izrek: (Drugi zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema) Če je funkcija f v kritični točki c dvakrat odvedljiva in je $f''(c) > 0$, zavzame f v c lokalni minimum, če je $f''(c) < 0$, pa lokalni maksimum.

Taylorjeva formula

Izrek: (Taylorjeva formula) Funkcija f naj bo (n + 1)-krat odvedljiva na intervalu (b,c) in naj bo $a \in (b,c)$. Potem za vsak $x \in (b,c)$ velja $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \dfrac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^2 + R_n$

Napaka R_n je enaka $R_n = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ kjer je ξ neka točka med a in x.

Izrek: (Tretji zadosten pogoj za obstoj lokalnega ekstrema) Funkcija f, ki je (n + 1)-krat odvedljiva, ima v kritični točki c lokalni ekstrem, če je $f'(c) = f''(c) = ... = f^{(n-1)}(c) = 0$ in $f^{(n)}(c) \neq 0$, kjer je n sodo število, in sicer lokalni maksimum, če je $f^{(n)}(c) < 0$, in lokalni minimum, če je $f^{(n)}(c) > 0$. Če je n liho število, ekstrema v točki c ni.

Konveksnost, konkavnost in prevoji

Def. : Funkcija f, definirana na intervalu [a,b], je na tem intervalu konveksna, če je za vsak $0 < \alpha < 1$ in za vsak par točk $x,y \in [a,b]$ $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$. Če je $f(\alpha x + (1-\alpha)y) \geq \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$ je funkcija konkavna.

Izrek: Dvakrat odvedljiva funkcija je na intervalu I konveksna, če je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in I$, če je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in I$.