# Zaporedja in številske vrste

## *Zaporedja*

**Def.:** Zaporedje $(a_n)= a_1,a_2,\ldots a_n,\ldots$ je predpis, ki vsakemu naravnemu številu n (indeksu zaporedja) priredi neko realno število $a_n$ (n-ti člen zap). Zaporedje je torej preslikava množice naravnih števil v realna števila.

**Def.:** Število a je stekališče zaporedja $(a_n)$ kadar je v vsaki $\varepsilon$ okolici $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ neskončno mnogo členov zaporedja.

**Trditev:** Natančna zgornja meja je največji člen ali pa je stekališče zaporedja. Podobno je natančna spodnja meja najmanjši člen ali pa stekališče zaporedja.

**Izrek:** Vsako (navzgor in navzdol) omejeno zaporedje ima vsaj eno stekališče.

### Konvergentna zaporedja

**Def.:** Zaporedje $(a_n)$ konvergira proti številu a natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $n_0$, da so v $\varepsilon$-okolici števila a vsi členi $a_n$ z indeksom $n > n_0$. Zaporedje, ki konvergira je konvergentno zaporedje, število a pa je njegova limita ($a = \lim a_n$). Zaporednje, ki ne konvergira, je divergentno.

Število a je limita zaporedja $a_n$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks N, da za vsak $n > N$ velja $|a_n- a| < \varepsilon$.

**Lastnosti konvergentnih zaporedij**

- Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.
  Zaporedje, ki ni omejeno ne more biti konvergentno. Prav tako zaporedje, ki ima več kot eno stekališče ne more biti konvergentno.
- Zaporedje je konvergentno natanko tedaj, ko je omejeno in ima samo eno stekališče.
- (Cauchyjev pogoj) Zaporedje $(a_n)$ je konvergentno natanko takrat, kadar zadošča Cauchyjevemu pogoju: Vsakemu pozitivnemu številu $\varepsilon$, pripada tak indeks $n_0$, da je neenačba $|a_{n+p}- a_n| < \varepsilon$ izpolnjena za vsak $n > n_0$ in za vsako naravno število p.

## *Divergentna zaporedja*

**Def.:** Če za vsako pozitivno število M obstaja tak indeks $n_0$, da je $a_n > M$, če je $n \geq n_0$, pravimo, da zaporedje $a_n$ divergira proti neskončnosti in napišemo $\lim a_n = \infty$.
Podobno zaporedje divergira proti $-\infty$: $\lim a_n = -\infty$, če za vsako pozitivno števila A obstaja tak indeks $n_0$, da je $a_n < -A$, če je $n > n_0$.
Zaporedje, ki divergira proti $\infty$ ali $-\infty$, ne more imeti stekališč. Seveda ni nujno, da divergentno zaporedje divergira proti $\infty$ ali proti $-\infty$.

### Lastnosti limite zaporedja

**Trditev:** Če imata zaporedji $(a_n)$ in $(b_n)$ isto limito, $\lim a_n = \lim b_n = l$, in je zaporedje $(c_n)$ med njima, tako da je $a_n \leq c_n \leq b_n$ za vsak n, je tudi $\lim c_n = l$.

**Trditev:** Če sta zaporedji $(a_n)$ in $(b_n)$ konvergentni, $\lim a_n = a$ in $\lim b_n = b$, potem so konvergentna tudi zaporedja:

$$(a_n + b_n) = a_1 + b_1, a_2 + b_2,\ldots$$
$$(a_n - b_n) = a_1 - b_1, a_2 - b_2,\ldots$$
$$(a_n \cdot b_n) = a_1 \cdot b_1, a_2 \cdot b_2,\ldots$$

**Trditev:** Če je $a_n \neq 0$ za vsak n in če zaporedje $(a_n)$ konvergira proti $a \neq 0$, konvergira tudi zaporedje $(1/a_n)$ in je $\lim \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a}$.

**Trditev:** Če zaporedje $(a_n)$, konvergira proti limiti a in zaporedje $(b_n)$, kjer so $b_n \neq 0$ za vsak n, kovergira proti $b \neq 0$, konvergira zaporedje kvocientov $(a_n / b_n)$ proti a / b.

## *Monotona zaporedja*

**Def.:** Zaporedje $(a_n)$ je naraščajoče, če za vsak $n \in N$ velja $a_n \leq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n < a_{n+1}$, je zaporedje strogo naraščajoče. Zaporedje $(a_n)$ je padajoče, če za vsako naravno število n velja $a_n \geq a_{n+1}$. Če za vsak n velja $a_n > a_{n+1}$, je zaporedje strogo padajoče. Zaporedje je monotono, če je naraščajoče ali padajoče.

Monotona zaporedja so vsaj z ene strani omejena. Vsako naraščajoče zaporedje $(a_n)$ navzdol omejeno in $\inf a_n = a_1$, vsako padajoče zaporedje $(b_n)$ pa je navzgor omejeno in $\sup b_n = b_1$.

**Izrek**: Naraščajoče zaporedje, ki je navzgor omejeno, konvergira proti $\lim a_n = \sup a_n$. Naraščajoče zaporedje, ki ni navzgor omejeno, pa divergira proti $\infty$.
Podobno, padajoče zaporedje, ki je navzdol omejeno, konvergira proti $\lim a_n = \inf a_n$. Padajoče zaporedje, ki ni navzdol omejeno pa divergira proti $-\infty$.

## *Potence z realnimi eksponenti*

**Trditev:** Zaporedje $(c^n)$ je konvergentno, če je $c \in (-1, 1]$.

$$\lim c^n = \begin{cases} \infty, \text{ če je } c > 1 \\ 1, \text{ če je } c = 1 \\ 0, \text{ če je } |c| < 1 \end{cases}$$

Če je $c \leq -1$, zaporedje ni konvergentno.

**Trditev:** Za vsak $c > 0$ je zaporedje $(c^{1/n})$ konvergentno z limito $\lim c^{\frac{1}{n}} = 1$.

**Def.:** Naj bo $c > 0$. Potem je $c^r = c^{\lim r_n} = \lim c^{r_n}$.

## Številske vrste

**Def.:** Če je dano zaporedje $(a_n)$ , je s predpisom $S_1 = a_1$, $S_n = S_{n-1} + a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + a_n$ določeno zaporedje delnih vsot s členi $a_k$, ki jo označimo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$ (2.8). Če je zaporedje delnih vsot $S_n$ konvergira proti številu s, pravimo da je vrsta (2.8) konvergentna in da je njena vsota s, kar zapišemo $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.
Če je zaporedje delnih vsot divergentno, je vrsta divergentna in nima vsote.

**Izrek: (Cauchyjev pogoj)** Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ je konvergentna natanko takrat, kadar za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak indeks $n_0$, da je $| S_{n+p} - S_n | = | a_{n+1} + \ldots + a_{n+p} | < \varepsilon$ za vsak $p \in N$, če je le $n > n_0$.

**Izrek: (Potreben pogoj za konvergenco)** Če je vrsta konvergentna, konvergira zaporedje njenih členov proti 0.

## *Vrste s pozitivnimi členi*

Če so vsi členi $a_n \geq 0$, je zaporedje delnih vsot vrste $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ naraščajoče in konvergentno natanko takrat, kadar je navzgor omejeno. Če ni omejeno, divergira proti $\infty$.

**Izrek: (Primerjalni kriterij)** Če sta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in je $a_n \leq b_n$ za vsak $n \in N$, velja: če je $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergentna, je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentna, ali drugače povedano, če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergentna je tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

***Izrek: (Kvocientni kriterij)*** *Če obstaja* $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$ *(ki je lahko tudi $\infty$), velja: vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira, če je $L < 1$ in divergira, če je $L > 1$.*

## *Absolutna in pogojna konvergenca vrst*

**Def.:** Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, če je konvergentna vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Vrsta je pogojno konvergentna, če je konvergentna, pa ni absolutno konvergentna.

**Izrek:** Absolutno konvergentna vrsta je konvergentna.

**Izrek: (Leibizev krtierij)** Če je $(a_n)$ padajoče zaporedje pozitivnih števil in $\lim a_n = 0$, je vrsta $a_1 - a_2 + a_3 - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergentna.

**Trditev:** Alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} \text{ je } \begin{cases} \text{absolutno konvergentna za } p > 1 \\ \text{pogojno konvergentna} \quad \text{za } 0 < p \leq 1 \\ \text{divergentna} \quad \text{za } p \leq 0. \end{cases}$$

**Izrek:** Poljubni absolutno konvergentni vrsti z istimi členi, vendar v drugačnem vrstnem redu, imata enako vsoto.