PREGLED POMEMBNEJŠIH OBRAZCEV

Permutacije brez ponavljanja

$$P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Permutacije s ponavljanjem

$$P_n^{k_1,k_2,\ldots,k_r} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_r!}$$

Variacije brez ponavljanja

$$V_n^r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Variacije s ponavljanjem

$$^{(p)}V_n^r = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{r} = n^r$$

Kombinacije brez ponavljanja

$$C_n^r = \frac{V_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \binom{n}{r}$$

Lastnosti binomskih simbolov

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r} \qquad C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$\binom{n}{r} + \binom{n}{r+1} = \binom{n+1}{r+1} \qquad C_n^r + C_n^{r+1} = C_{n+1}^{r+1}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{n} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n$$

Kombinacije s ponavljanjem

$$^{(p)}C_n^r = C_{n+r-1}^r = \binom{n+r-1}{r}$$

Vezane kombinacije

$$C_{n_1,n_2,\ldots,n_m}^{r_1,r_2,\ldots,r_m} = \binom{n_1}{r_1} \cdot \binom{n_2}{r_2} \cdot \ldots \cdot \binom{n_m}{r_m}$$

Binomski izrek

$$(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} a^{n-r} b^r$$

3. OSNOVE OPISNE STATISTIKE

V tem poglavju se seznanimo s statistiko in z osnovnimi statističnimi pojmi, kot so populacija, enota, vzorec, statistična spremenljivka. Naučimo se urejati podatke in jih grupirati v frekvenčne razrede. Iz izhodiščne frekvenčne porazdelitve izračunamo relativne frekvence in različne kumulative, za lažjo predstavljivost sežemo po grafičnih orodjih. Spoznamo, kako z nekaj parametri (različnimi srednjimi vrednostmi, podatki o variabilnosti itd.) vsaj grobo opišemo porazdelitev. Za likof na hitro pregledamo še indeksna števila, ta strah in trepet slovenskih novinarjev...

3.1 Osnovni statistični pojmi

Ker stopamo v nove prostore, najprej definicija:

Statistika je veda, ki proučuje množične pojave.

Z zbiranjem, urejanjem, grupiranjem, povzemanjem, prikazovanjem in analiziranjem številskih podatkov o teh pojavih skuša odkriti njihove splošne zakonitosti in nato pridobljena spoznanja izkoristiti za oblikovanje ustreznih napovedi oziroma odločitev.

Resnici na ljubo je treba dodati, da ima izraz "statistika" še kopico drugih pomenov, tako z njim na primer označujemo

a) same (običajno sistematično zbrane) številčne podatke;

b) delo, ki nas pripelje do takih zbirk;

c) organe (službe, institucije...), ki to delo opravljajo

in še kaj. Po tej plati nas statistika v tem učbeniku ne bo zanimala.

Poglejmo si takle primer. Smučanje je v Sloveniji množičen pojav. Prodajalci smučarske opreme zbirajo in proučujejo podatke o smučanju in o tistih pojavih, ki so s smučanjem povezani, da bi odkrili najpomembnejše zakonitosti (npr. delež Slovencev, ki se ukvarja s smučanjem; zvezo med starostjo in nagnjenostjo k temu športu; odvisnost med osebnimi dohodki in sredstvi, ki so jih ljudje pripravljeni (sposobni) porabiti za smučanje, itd.). Te odnose morajo poznati, če hočejo pravilno načrtovati obseg poslovanja.

Statistika se je včasih ukvarjala skoraj izključno z gospodarstvom, naseljenostjo,... in drugimi "državnimi zadevami"; odtod tudi njeno ime, ki prihaja iz latinske besede "status", kar pomeni "stanje", pa tudi "država". Kasneje je svoje delovno področje razširila na najrazličnejše znanosti, ki imajo opravka z množičnimi pojavi, npr. agronomijo, biologijo, ekonomijo, elektroniko, fiziko, kemijo, medicino, psihologijo, sociologijo, itd. Zato lahko mirno rečemo, da dandanašnji ni področja, na katerem bi bili lahko uspešni, ne da bi obvladali vsaj osnovne statistične tehnike.

PREGLED POMEMBNEJŠIH OBRAZCEV

Kumulativna porazdelitev frekvenc

$$F_1 = 0, \quad F_k = F_{k-1} + f_{k-1}$$

Relativna frekvenca in kumulativna porazdelitev

$$f_k^o = \frac{f_k}{N}, \quad F_1^o = 0, \quad F_k^o = F_{k-1}^o + f_{k-1}^o$$

Navadna in tehtana aritmetična sredina

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i, \quad \mu = \frac{f_1 \cdot y_1 + \ldots + f_r \cdot y_r}{f_1 + \ldots + f_r} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} f_i y_i$$

Geometrijska in harmonična sredina

$$G = \sqrt[N]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_N}, \quad H = \{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{y_i}\}^{-1}.$$

Varianca (negrupirani podatki)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i^2 - \mu^2$$

Varianca (grupirani podatki)

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} f_i (y_i - \mu)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{r} f_i y_i^2 - \mu^2$$

Standardni odklon, variacijski razmik, koeficient variacije

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}, \quad R_v = y_{max} - y_{min}, \quad K_v = \frac{\sigma}{\mu}$$

Bazni in verižni indeksi

$$I_{k/0} = 100 \cdot \frac{Y_k}{Y_0}, \quad J_k = 100 \cdot \frac{Y_k}{Y_{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

Koeficient dinamike in povprečni koeficient dinamike

$$K_i = Y_i / Y_{i-1}, \quad \overline{K} = \sqrt[N]{K_1 \cdot K_2 \cdot \ldots \cdot K_N} = \sqrt[N]{Y_n / Y_1}$$

4. VERJETNOSTNI RAČUN

Verjetnostni račun je v nekaj sto letih prehodil zanimivo pot od mističnih ... "črne magije" do korektno postavljene matematične discipline in enega naj... tudi najbolj uporabnih matematičnih orodij. Verjetnostni modeli so postali ... govorica v različnih tehničnih vedah, enako velja za področja izven tehnike. ... sodobna ekonomija in management ne moreta več brez verjetnostnega računa ... nepogrešljivi element, brez katerega je statistika samo pripovedovanje zgodbic, ... pojavlja tudi kot povsem samostojno orodje za analizo poslovnih tveganj in ... njihovo zmanjševanje.

Kratek srednješolski učbenik sicer ne more pričarati vse lepote tega dela ma... vendar lahko odstre zaveso, s pregledom najpomembnejših osnovnih gradnikov pa ... bralcu nekoliko lažjo pot naprej, k resnejši literaturi.

4.1 Poskusi in dogodki

Trije osnovni pojmi, ki jih bomo srečevali ves čas našega ukvarjanja ... jetnostnim računom, so

- poskus,
- dogodek in
- verjetnost dogodka.

Ker je tako pomembno, da jasno razumemo vloge teh treh gradnikov, ji... namenili več pozornosti, kot bi se morda zdelo potrebno bralcu, ki se prvič ... verjetnostnim računom. Prosimo za potrpljenje: kasneje se vedno izkaže, da ... uvodnega sitnarjenja prej premalo kot preveč.

V verjetnostnem računu bomo z izrazom poskus označevali vsa... teno dejanje, ki ga opravimo v natanko določenih pogojih, na primer:

- Po mizi zakotalimo običajno igralno kocko.
- Iz običajnega kompleta 32 kart izberemo eno karto.
- Kupimo eno od stotisoč loterijskih srečk.
- S puško ustrelimo proti tarči.

Vsak poskus torej pomeni realizacijo neke množice skupaj nastop... dejstev ali *kompleksa pogojev*. Bolj po domače: predpostavljamo, ... poskus vedno odvija pod enakimi, natančno določenimi pogoji.

Pojav, ki v to množico pogojev ne spada in se lahko v posam... poskusu zgodi ali pa tudi ne, imenujemo dogodek. V omenjenih po... so možni na primer naslednji dogodki:

PREGLED POMEMBNEJŠIH OBRAZCEV

Relativna frekvenca dogodka $f^{o}(A) = \dfrac{f(A)}{n}$

Klasična definicija verjetnosti $P(A) = \dfrac{m}{n}$

Lastnosti verjetnosti - aksiomi Kolmogorova

NENEGATIVNOST $(\forall A)(A \in \mathcal{P}G \Rightarrow P(A) \geq 0)$

NORMIRANOST $P(G) = 1$

ADITIVNOST $A \cap B = N \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Posledice

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A) + P(A') = 1, \quad P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) \leq 1, \quad P(N) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Pogojna verjetnost, verjetnost produkta, neodvisnost

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

$$A \text{ in } B \text{ neodvisna} \Leftrightarrow P(A) = P(A/B), \; P(B) = P(B/A)$$

$$A \text{ in } B \text{ neodvisna} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)\ldots P(A_n/(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}))$$

$$\text{V celoti neodvisni}: P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n)$$

Obrazec za popolno verjetnost

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + \ldots + P(H_n)P(A/H_n)$$

Bayesov obrazec

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Bernoullijev obrazec

$$P(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

Najverjetnejša frekvenca v Bernoullijevem zaporedju

$$np - q \text{ ni celo število} \Rightarrow k_o = [np - q] + 1$$

$$np - q \text{ je celo število} \Rightarrow k_o = np - q \text{ in } k_o = np - q + 1$$

Pascalov obrazec

$$P(\text{frekvenca } k \text{ v } n - \text{tem poskusu}) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Posplošeni Bernoullijev obrazec

$$P(n; p_1, p_2, \ldots, p_m; k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m}$$

Matematično upanje (končna zaloga vrednosti)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

Disperzija in standardni odklon

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - E(X)]^2 = \{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\} - [E(X)]^2$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Binomska porazdelitev

$$X \sim b(n, p) \Rightarrow E(X) = np, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Neenačba Čebiševa

$$P(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \frac{D(X)}{t^2}$$

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{D(X)}{t^2}$$

PREGLED POMEMBNEJŠIH OBRAZCEV

Relativna frekvenca dogodka $f^o(A) = \dfrac{f(A)}{n}$

Klasična definicija verjetnosti $P(A) = \dfrac{m}{n}$

Lastnosti verjetnosti - aksiomi Kolmogorova

NENEGATIVNOST $(\forall A)(A \in PG \Rightarrow P(A) \geq 0)$

NORMIRANOST $P(G) = 1$

ADITIVNOST $A \cap B = N \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Posledice

$$A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$$

$$P(A) + P(A') = 1, \quad P(A) = 1 - P(A')$$

$$P(A) \leq 1, \quad P(N) = 0$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Pogojna verjetnost, verjetnost produkta, neodvisnost

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, \quad P(AB) = P(B)P(A/B) = P(A)P(B/A)$$

$$A \text{ in } B \text{ neodvisna} \Leftrightarrow P(A) = P(A/B), \ P(B) = P(B/A)$$

$$A \text{ in } B \text{ neodvisna} \Leftrightarrow P(AB) = P(A)P(B)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2/A_1)...P(A_n/(A_1 \cap ... \cap A_{n-1}))$$

$$\text{V celoti neodvisni}: P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n)$$

Obrazec za popolno verjetnost

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n)$$

Bayesov obrazec

$$P(H_i/A) = \frac{P(H_i)P(A/H_i)}{P(A)} \quad (i = 1, 2, ..., n)$$

Bernoullijev obrazec

$$P(n;p;k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, ..., n)$$

Najverjetnejša frekvenca v Bernoullijevem zaporedju

$$np - q \text{ ni celo število} \Rightarrow k_o = [np - q] + 1$$

$$np - q \text{ je celo število} \Rightarrow k_o = np - q \text{ in } k_o = np - q + 1$$

Pascalov obrazec

$$P(\text{frekvenca } k \text{ v } n - \text{tem poskusu}) = \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

Posplošeni Bernoullijev obrazec

$$P(n; p_1, p_2, ..., p_m; k_1, k_2, ..., k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot ... \cdot k_m!} p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot ... \cdot p_m^{k_m}$$

Matematično upanje (končna zaloga vrednosti)

$$E(X) = \sum_{k=1}^{n} p_k x_k$$

Disperzija in standardni odklon

$$D(X) = E\{[X - E(X)]^2\}$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i [x_i - E(X)]^2 = \{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\} - [E(X)]^2$$

$$\sigma = \sqrt{D(X)}$$

Binomska porazdelitev

$$X \sim b(n,p) \Rightarrow E(X) = np, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}$$

Neenačba Čebiševa

$$P(|X - E(X)| < t) \geq 1 - \frac{D(X)}{t^2}$$

$$P(|X - E(X)| \geq t) \leq \frac{D(X)}{t^2}$$

Normalna porazdelitev

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

Standardizacija

$$X \sim N(a,\sigma) \implies Z = \frac{X-a}{\sigma} \sim N(0,1)$$

Standardizirana normalna porazdelitev

$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \varphi(x)$$

$\Phi(z) =$ ploščina pod $\varphi(x)$ od $x = 0$ do $x = z$, $\Phi(-z) = -\Phi(z)$

$$X \sim N(0,1) \implies P(\alpha \le Z \le \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha)$$

Poljubna normalna porazdelitev

$$X \sim N(a,\sigma) \implies P(\alpha \le X \le \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right)$$

Verjetnosti za značilne intervale

$$X \sim N(a,\sigma) \implies \begin{array}{lcl} P(a-\sigma \le X \le a+\sigma) & = & 0{\cdot}6826 \\ P(a-2\sigma \le X \le a+2\sigma) & = & 0{\cdot}9544 \\ P(a-3\sigma \le X \le a+3\sigma) & = & 0{\cdot}9974 \end{array}$$

Bernoullijev zakon velikih števil

$$P\left(\left|\frac{X}{n} - p\right| < t\right) \ge 1 - \frac{p(1-p)}{n t^2}$$

X : frekvenca dogodka, p : njegova verjetnost, n : število poskusov