Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2013/14

Kazalo

Izpit 2, IŠRM ANA1
Ponedeljek 10.02.2014
$10^{15} - 12^{00}$ 2.02

(1) Za vsako naravno število $n \geq 1$, naj bo dano kompleksno število

$$z_n = \frac{n+i}{n}\,.$$

(a) [12] Izračunaj polarno obliko zapisa števila z_n za $n \geq 1$.

(b) [13] S pomočjo polarnega zapisa števil z_n izračunaj limito

$$\lim_{n\to\infty} (z_n)^n\,.$$

(2) Dana naj bo funkcija $f(x) = \arcsin x$.

(a) [15] Izračunaj Taylorjev polinom $T_3(f)$ reda 3 funkcije f, razvit v točki $a = 0$.

(b) [10] S pomočjo formule za ostanek Taylorjevega polinoma pokaži, da je absolutna vrednost razlike med vrednostima $f\left(\frac{1}{2}\right)$ in $T_3(f)\left(\frac{1}{2}\right)$ manjša od 0.04.

(3) [25] Dana je funkcija $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$. Določi definicijsko območje funkcije, ničle, obnašanje na robovih definicijskega območja, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti. S pomočjo teh podatkov skiciraj graf funkcije.

(4) [25] Poišči ekstremne vrednosti funkcije $f(x, y) = xy$, pri pogoju

$$x^4 + y^4 = 8\,.$$

1. Točkovnik

(1) (a) 2 - realni in imaginarni del
5 - razdalja
5 - kot
(b) 7- limita razdalje (na n-to potenco)
6 - limita kota (na n-to potenco)

(2) (a) 1 - $f(0)$
4 - $f'(0)$
4 - $f''(0)$
4 - $f'''(0)$
2 - Taylorjev polinom iz teh podatkov
(b) 5 - $f''''(x)$
5 - ocena napake iz npr. Lagr. oblike ostanka

(3) 7 - definicijsko območje funkcije, ničle, obnašanje na robovih definicijskega območja
7- odvod, stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja
6 - drugi odvod, intervali konveksnosti in konkavnosti
5 - graf, ki je narisan z upoštevanjem vseh zgoraj izračunanih podatkov.

(4) 5 - nastavek za vezani ekstrem $F(x, y, \lambda)$
5 - $\partial_x F$
5 - $\partial_y F$
10 - izračun stac. točk

Rešitve

(1) Imamo $z_n = 1 + i\frac{1}{n}$, od koder izračunamo dolžino z_n in kot, od koder dobimo

$$z_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}\, e^{i \arctan \frac{1}{n}}\,.$$

Sedaj dobimo

$$\lim (z_n)^n = \lim \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i\, n \arctan \frac{1}{n}} =$$

$$= \lim \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{n}{2n^2}} e^{i\, n \arctan \frac{1}{n}} = e^i\,,$$

saj je

$$\lim n \arctan \frac{1}{n} = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \frac{\arctan \frac{1}{n}}{\tan(\arctan \frac{1}{n})} =$$

$$= \frac{(\arctan \frac{1}{n}) \cos(\arctan \frac{1}{n})}{\sin(\arctan \frac{1}{n})} = 1$$

Alternativno, zgornjo limito lahko gledamo tudi kot

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arctan x}{x} = L'Hop. = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1\,.$$

(2) Imamo $f(x) = \arcsin x$, $f'(x) = \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$, $f''(x) = \frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $f'''(x) = \frac{1+2x^2}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$ in $f^{(4)}(x) = \frac{3x(3+2x^2)}{(1-x^2)^{\frac{7}{2}}}$, od koder sledi

$$T_3(f)(x) = x + \frac{1}{3!}x^3$$

Imamo formulo za ostanek

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x^4$$

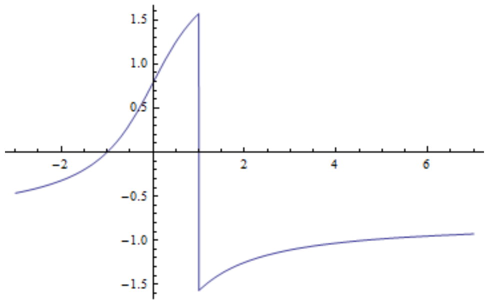
Sedaj ocenimo

$$|R_3(\frac{1}{2})| = |\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(\frac{1}{2})^4| \leq$$

vstavimo $\xi = \frac{1}{2}$ iz 4. odv. se vidi, da neenakost zdrži

$$\leq \frac{\frac{3(\frac{1}{2})(3+2(\frac{1}{2})^2)}{(1-(\frac{1}{2})^2)^{\frac{7}{2}}}}{4!}(\frac{1}{2})^4 = 0.037$$

(3) Def. območje je $\mathbb{R} - \{1\}$, ničla je pri $x = -1$. Velja $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \pm\pi/2$ ter $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = -\pi/2$. Odvod je $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, kar pomeni, da stacionarnih točk ni, drugi odvod $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, prevoj je torej na $x = 0$.



(4) Rešujemo vezani ekstrem $F(x,y,\lambda) = xy - \lambda(x^4 + y^4 - 8)$. Pripadajoče enačbe so

$$y = 4\lambda x^3 \qquad x = 4\lambda y^3 \qquad x^4 + y^4 = 8\,.$$

Prvo in drugo enačbo preoblikujemo v

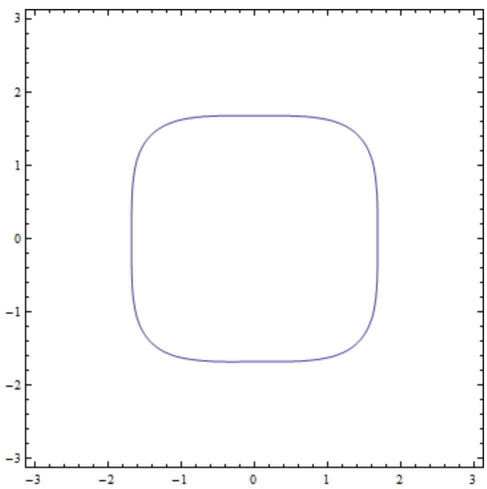
$$\frac{y}{x^3} = 4\lambda \qquad \frac{x}{y^3} = 4\lambda$$

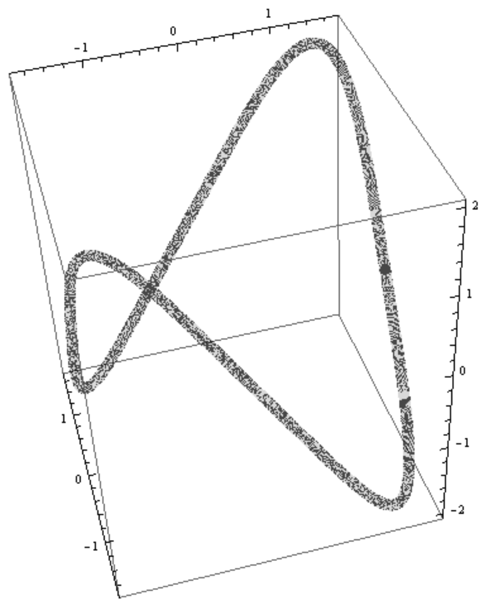
od koder sledi $\frac{y}{x^3} = \frac{x}{y^3}$ oz. $x^4 = y^4 \Rightarrow |x| = |y|$. Imamo torej dve možnosti $y = x$ in $y = -x$. Vstavimo v zadnjo enačbo in dobimo

$$2x^4 = 8$$

od koder dobimo $x = \pm\sqrt{2}$. Stacionarne točke so torej štiri:

$$(\sqrt{2}, \sqrt{2}) \quad (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad (\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \quad (-\sqrt{2}, \sqrt{2})\,.$$




-1
0
1
2
1
0
-1
-2
1
0
-1