Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2013/14

Kazalo

Izpit 1, IŠRM ANA1
Ponedeljek 27.01.2014
$12^{15} - 14^{00}$ 2.01

(1) [25] Izračunaj limite zaporedij:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2}$

(b) $a_1 = 1$, $a_n = \frac{1}{4}a_{n-1}^2 + 1$.

(2) [25] Dana naj bo funkcija $f(x) = \sqrt{1-x}$. S pomočjo matematične indukcije dokaži, da velja

(a)

$$f^{(n)}(x) = -\frac{(2n)!}{4^n n!(2n-1)}(1-x)^{\frac{1}{2}-n} \qquad n \geq 1\,.$$

(b) S pomočjo prejšnje točke pokaži, da velja enakost

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{4^n (n!)^2 (2n-1)} \qquad n \geq 1\,.$$

(3) [25] Dana je funkcija $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$. Določi definicijsko območje funkcije, ničle, obnašanje na robovih definicijskega območja, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti. S pomočjo teh podatkov skiciraj graf funkcije.

(4) [25] Funkcija dveh spremenljivk $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x,y) = xye^{-x^2-y^2}\,.$$

(a) Poišči stacionarne točke funkcije f. S pomočjo drugih parcialnih odvodov ugotovi, v katerih točkah ima funkcija f lokalne ekstreme.

(b) Izračunaj Taylorjev polinom reda 2 funkcije f, razvit okoli točke $(0,0)$.

1. Točkovnik

(1) (a) 6 - izraz v oklepaju konvergira k $\frac{1}{2}$
6.5 - celotna limita konv. k 0 (npr. primerjalni krit.)
(b) 5 - kandidat za limito
7.5 - naraščanje (3.75) in omejenost zaporedja (3.75)

(2) (a) 3 - začetek indukcije ($n = 1$ ali $n = 0$)
6 - pravilno izračunan $(f^{(n)}(x))'$, kjer predpostavimo, da $f^{(n)}(x)$ zadošča formuli iz naloge.
6 - primerjava $(f^{(n)}(x))'$ z dano formulo za $f^{(n+1)}(x)$.
(b) 5 - pravilna binomska formula za $f(x)$
5 - primerjava koef. binomske formule s koef. Taylorjevega polinoma (izraženimi s pomočjo odvodov funkcije f).

(3) 5 - definicijsko območje funkcije, ničle, obnašanje na robovih definicijskega območja
7- odvod, stacionarne točke, intervali naraščanja in padanja
7 - drugi odvod, intervali konveksnosti in konkavnosti
5 - graf, ki je narisan z upoštevanjem vseh zgoraj izračunanih podatkov.

(4) (a) 5 - pravilni prvi parc. odvodi
7 - stacionarne točke
3 - tip stacionarnih točk preverjen s Hessejevo matriko
(b) 5 - prvi in drugi odvodi izračunani v $(0, 0)$
5 - pravilen zapis Taylorjevega polinoma reda 2.

Rešitve

(1) (a) Najprej opazimo, da je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{2n^2+1} = \frac{1}{2}$. Potem imamo po primerjalnem kriteriju za dovolj velike n oceno

$$0 \leq \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n^2}.$$

Zaporednje na desni konvergira k 0, torej je $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+2}{2n^2+1}\right)^{n^2} = 0$.

(b) Kandidati za limito so rešitve enačbe $x = \frac{1}{4}x^2 + 1$. Zadošča ji le $x = 2$. Pokažemo (z indukcijo), da je zaporedje naraščujoče in navzgor omejeno:

$$a_n \leq 2 \Rightarrow a_n^2 \leq 4 \Rightarrow \frac{1}{4}a_n^2 + 1 \leq 2 \Rightarrow a_{n+1} \leq 2$$

in

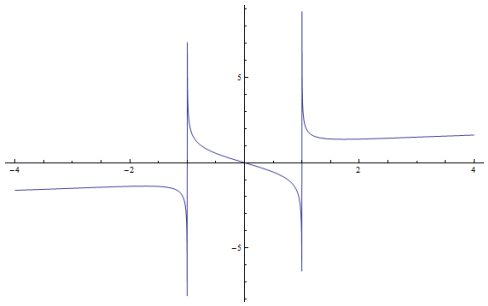
$$a_{n-1} \leq a_n \Rightarrow \frac{1}{4}a_{n-1}^2 + 1 \leq \frac{1}{4}a_n^2 + 1 \Rightarrow a_n \leq a_{n+1}$$

Torej $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

(2) (a) Izračunamo iz indukcijske predpostavke $f^{(n+1)}(x)$ in primerjamo.

(b) Zapišemo binomsko vrsto za $\sqrt{1-x}$ pri $x = 0$ in upoštevamo, kako se s Taylorjevo formulo izraža binomski koeficient.

(3) Def. območje je $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$, ničla je pri $x = 0$, pri $x = \pm 1$ sta pola. Odvod je $f'(x) = \frac{x^2-3}{2(x^2-1)^{4/3}}$, kar pomeni, da sta $x = \pm\sqrt{3}$ stacionarni točki, drugi odvod $f''(x) = -\frac{2x(x^2-9)}{9(x^2-1)^{7/3}}$, prevoja sta na $x = \pm 3$ in $x = 0$.



(4) $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$,

$$f_x = (y - 2x^2y)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_y = (x - 2xy^2)e^{-x^2-y^2}$$

Stacionarne točke so torej $(0, 0)$ ter še vse štiri možne $(\pm\sqrt{2}/2, \pm\sqrt{2}/2)$. Izračunamo še druge odvode

$$f_{xx} = 2xy(2x^2 - 3)e^{-x^2-y^2}$$

$$f_{xy} = (2x^2 - 1)(2y^2 - 1)e^{-x^2-y^2}$$
$$f_{yy} = 2xy(2y^2 - 3)e^{-x^2-y^2}$$

Dobimo 2 lok. max, 2 lok. min in sedlo v (0,0).
Taylorjev polinom 2. reda v (0,0), pa je kar

$$T_2(x, y) = xy\,.$$