Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2013/14

Kazalo

KOLOKVIJ 1, IŠRM ANA1
PETEK 29.11.2013
$14^{15} - 16^{00}$ 2.01

(1) [25] Poišči vse pare kompleksnih števil $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, ki zadoščajo sistemu enačb

$$z\bar{w} = 4\sqrt{2} \quad , \quad \frac{z^2}{\bar{w}} = i\sqrt{2}\,.$$

(2) [25] S pomočjo matematične indukcije preveri, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja formula:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

(3) [25] Izračunaj limiti zaporedij:
   (a) [15] $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2-n}\right)^{2n}$
   (b) [10] $a_1 = 1$ in $a_{n+1} = \sqrt[4]{8a_n}$ za $n \in \mathbb{N}$

(4) [25] Izračunaj limiti funkcij:
   (a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
   (b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{\tan 3\pi x}$.

Rešitve

(1) Iz prve enačbe izrazimo $\bar{w} = \frac{4\sqrt{2}}{z}$ in vstavimo v drugo enačbo. Po preureditvi dobimo

$$z^3 = 8\,i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}\,.$$

Dobimo rešitve

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}\,,\ z_1 = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}\,,\ z_2 = 2e^{i\frac{9\pi}{6}}\,.$$

Iz zveze $\bar{w} = \frac{4\sqrt{2}}{z}$ oz. $w = \frac{4\sqrt{2}}{\bar{z}}$ nato izračunamo še pripadajoče w. Dobimo

$$w_0 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{6}}\,,\ w_1 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{6}}\,,\ w_2 = 8\sqrt{2}e^{i\frac{9\pi}{6}}\,.$$

(2) Za $n = 1$ formula velja, saj dobimo

$$1 = (-1)^0\frac{1(1+1)}{2} = 1\,.$$

Predpostavimo sedaj, da formula velja do naravnega števila n. Hočemo pokazati, da potem velja tudi za naslednje naravno število $n+1$. Leva stran formule se glasi:

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \ldots + (-1)^{n-1}n^2 + (-1)^n(n+1)^2 = \text{i.p.} =$$

$$(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2} + (-1)^n(n+1)^2 = (-1)^n(-\frac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2) =$$

$$(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}\,,$$

torej velja formula tudi v primeru $n+1$.

(3) (a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2-n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+n+1}{n^2-n}\right)^{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n}{n+1}}\right)^{2n} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2-n}{n+1}}\right)^{\frac{n^2-n}{n+1}}\right)^{\frac{2n(n+1)}{n^2+n}} = e^2.$$

(b) Najprej predpostavimo, da zaporedje konvergira k številu $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Število a potem zadošča enačbi $a = \sqrt[4]{8a}$, oz. $a^4 = 8a$, od koder dobimo dva kandidata za limito $a = 0$ in $a = 2$.
Pokažimo sedaj s pomočjo indukcije, da je zaporedje (a_n) monotono naraščujoče. Očitno je $a_2 \geq a_1$. Predpostavimo sedaj, da je $a_n \geq a_{n-1}$. Od tod sledi, da je

$$\sqrt[4]{8a_n} \geq \sqrt[4]{8a_{n-1}} \Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n\,.$$

Zaporedje pa je tudi navzgor omejeno z 2. Zopet po indukciji iz predpostavke $a_n \leq 2$ sledi

$$a_{n+1} = \sqrt[4]{8a_n} \leq \sqrt[4]{8\cdot 2} = \sqrt[4]{16} = 2\,.$$

Zaporedje (a_n) je torej konvergentno in konvergira k 2, saj k 0 ne more.

(4) (a) $\lim\limits_{x\to 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{(2-\sqrt{x-3})(2+\sqrt{x-3})}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = \lim\limits_{x\to 7} \frac{7-x}{(x-7)(x+7)(2+\sqrt{x-3})} =$
$= \lim\limits_{x\to 7} \frac{-1}{(x+7)(2+\sqrt{x-3})} = -\frac{1}{56}.$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \pi x}{\tan 3\pi x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin \pi x \cos 3\pi x}{\sin 3\pi x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\pi x \sin \pi x \cos 3\pi x}{3\pi x \sin 3\pi x} = \frac{1}{3}\,.$