Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2013/14

Kazalo

KOLOKVIJ 2, IŠRM ANA1
PETEK 17.01.2014
$14^{15} - 16^{00}$ 2.01

(1) [25] Dana je funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x-1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ c & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

(a) Določi število c tako, da bo funkcija f zvezna.
(b) Ali je funkcija f zvezno odvedljiva (za izračunani c iz točke (a))?

(2) [25] Dana je funkcija $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$. Določi definicijsko območje funkcije, ničle, obnašanje na robovih definicijskega območja, stacionarne točke, intervale naraščanja in padanja ter intervale konveksnosti in konkavnosti. S pomočjo teh podatkov skiciraj graf funkcije.

(3) [25] Naj bo f realna funkcija ene realne spremenljivke, dana implicitno z enačbo

$$f(x) = x + f(x)^3 .$$

Izračunaj Taylorjev polinom reda 2 funkcije f, razvit okoli točke $a = 6$.

(4) [25] Funkcija dveh spremenljivk $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je dana s predpisom

$$f(x, y) = \frac{1}{x^2 + 2y^2 - 2x - 8y + 10} .$$

Poišči stacionarne točke funkcije f. S pomočjo drugih parcialnih odvodov ugotovi, v katerih točkah ima funkcija f lokalne ekstreme.

Rešitve

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$, torej $c=1$. Izračunamo odvod v $x=0$:

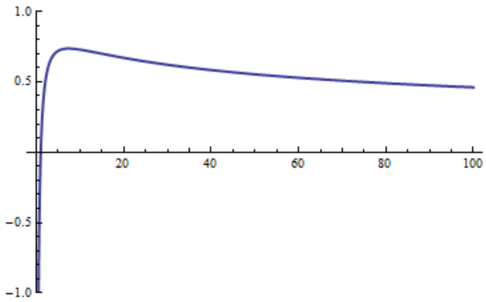
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-1}{x}-1}{x}=\ldots=\frac{1}{2}$$

$f'(x)=\frac{xe^x-(e^2x-1)}{x^2}$ in ker je

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-(e^x-1)}{x^2}=\ldots=\frac{1}{2}$$

to pomeni, da je $f'(x)$ zvezna funkcija, i.e. f je zvezno odvedljiva.

(2) Def. območje je $(0,\infty)$, ničla je pri $x=1$. Velja $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=-\infty$ ter s pomočjo L'Hospitala $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$. Odvod je $f'(x)=\frac{1}{x^{3/2}}(1-1/2\ln x)$, kar pomeni, da je $x=e^2$ stacionarna točka, drugi odvod $f''(x)=\frac{1}{x^{5/2}}(-2+3/4\ln x)$, prevoj je torej na $x=e^{8/3}$.



(3) $f(6)=-2$ (dobimo še dve $\mathbb{C}$ rešitvi). Odvajamo obe strani enačbe $f(x)=x+f(x)^3$, dobimo

$$f'=1+3f^2f'\Rightarrow f'=\frac{1}{1-3f^2}\Rightarrow f'(6)=-\frac{1}{11}\,.$$

zvezo $f'=\frac{1}{1-3f^2}$ odvajamo še enkrat in dobimo

$$f''=-(1-3f^2)^{-2}(-6ff')\Rightarrow f''=\frac{6ff'}{(1-3f^2)^2}\Rightarrow f''(6)=\frac{12}{11^3}$$

Rešitev

$$T_{3,f}(x)=-2-\frac{1}{11}(x-6)+\frac{6}{11^3}(x-6)^2\,.$$

(4) $f(x,y)=\frac{1}{x^2+2y^2-2x-8y+10}$,

$$f_x=\frac{2-2x}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^2}=\frac{2-2x}{(1+(x-1)^2+(y-2)^2)^2}$$

$$f_y=\frac{8-4y}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^2}=\frac{8-4y}{(1+(x-1)^2+(y-2)^2)^2}$$

Stacionarna točka je torej $x = 1$, $y = 2$. Izračunamo še druge odvode

$$f_{xx} = \frac{2(2-2x)^2}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^3} - \frac{2}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^2}$$

$$f_{xy} = \frac{2(2x-2)(4y-8)}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^3}$$

$$f_{yy} = \frac{2(4y-8)^2}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^3} - \frac{4}{(x^2+2y^2-2x-8y+10)^2}$$

Dobimo $f_{xx}(1,2) = -2$, $f_{xy}(1,2) = 0$ in $f_{yy}(1,2) = -4$, kar pomeni, da je točka $(1,2)$ lokalni maksimum.