

Vaje: Funkcije

1. Preuči injektivnost, surjektivnost, monotonost, omejenost, sodost in periodičnost funkcije

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x - \sin x.$$

2. Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti funkcij:

(a) $f(x) = |x - 1| + |2 - 3x| + x$;

(b) $g(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

3. Kako je z injektivnostjo in surjektivnostjo funkcij:

(a) $f(x) = 1 + x^3$;

(b) $g(x) = 4x + |1 - x| - |1 - 2x|$;

(c) $h(x) = x \ln |x|$.

4. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2}x; & x \in \mathbb{Q}, \\ \sqrt{3}x; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ali je injektivna? Ali je surjektivna?

5. Funkciji $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sta definirani s predpisoma

$$f(x) = \begin{cases} -\sin^2 x; & x \leq \pi, \\ -e^x; & x > \pi, \end{cases} \quad \text{in} \quad g(x) = \begin{cases} \arcsin x; & |x| \leq 1, \\ x^2; & |x| > 1. \end{cases}$$

(a) Nariši grafa funkcij f, g in izpelji pravila za $f \circ g$ in $g \circ f$.

(b) Kako je z injektivnostjo in surjektivnostjo teh funkcij?

6. Za funkciji

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{in} \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

izpelji adicijska izreka in ostala pravila, ki so zelo podobna zvezam med funkcijama \sin in \cos .

7. Ali je preslikava

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = |a + x| + |x|$$

injektivna in ali je surjektivna za kakšno realno število a ? Za katere a je injektivna zožitev $f|_{[0, \infty)}$? Ali obstaja takšno realno število a , da bo funkcija $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ bijektivna?

8. S primerno izbiro startnega in ciljnega prostora določi inverzni preslikavi za:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$,

(b) $g(x) = \arcsin \frac{x-2}{6}$,

(c) $\operatorname{ch} x$.

9. Polinomi Čebiševa so podani s pravilom

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

(a) Določi definicijsko območje T_n .

(b) Izračunaj T_0 , T_1 in T_2 .

(c) Pokaži, da je T_n polinom stopnje n . (Najprej izpelji rekurzivno formulo $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$.)

(d) Kako je s parnostjo funkcij T_n ?

(e) Izračunaj vodilni koeficient T_n .

10. Skiciraj funkcijo $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

11. Za funkcijo

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

izračunaj $f(f(\dots f(f(x))\dots))$, kjer funkcija f nastopa n krat.

12. Naj bo a iracionalno število in f funkcija

$$f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = ax - [ax],$$

kjer $[x]$ pomeni celi del x (to je, največje celo število, ki je manjše ali enako x). Pokaži:

- (a) f je injektivna.
- (b) $f(\mathbb{N}) \subset (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
- (c) Če $y_1, y_2 \in f(\mathbb{N})$ in je $y_1 + y_2 < 1$, potem je $y_1 + y_2 \in f(\mathbb{N})$.