

Vaje: Indukcija

1. Dokaži, da je vsota prvih n lihih števil enaka n^2 .

2. Dokaži, da je

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. Dokaži, da 35 deli $6^{2n} - 1$.

4. Seštej:

$$s_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

5. Dokaži, da je

$$\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) \cdot \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

6. Dokaži neenakost:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}.$$

7. Dokaži, da $7 \mid (13^{2n} + 6)$.

8. Pokaži, da $10 \mid (2^{2n} - 6)$ za $n \geq 2$.

9. Dokaži *Bernoullijevo neenakost*: za naravno število n in realno število $a > -1$ velja

$$(1+a)^n \geq 1+na.$$

10. V ravnini imamo n nevzporednih premic, od katerih se nobene tri ne sekajo v isti točki. Pokaži, da razdelijo ravnino na $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ delov.

11. Pokaži, da je

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

12. Pokaži, da je

$$n! \leq 2\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

13. Dokaži, da velja

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

14. Dokaži, da je

$$2! \cdot 4! \cdots (2n)! \geq ((n+1)!)^n.$$

15. Dokaži, da je

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \cdots + \sqrt{20}}}} < 5,$$

pri čemer nastopa n korenov.

16. Pokaži, da 133 deli $11^{n+2} + 12^{2n+1}$.

17. Dokaži, da 54 deli $2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$.