

Vaje: Odvod

1. Čim bolj natančno nariši grafe naslednjih funkcij:

(a) $y = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

(b) $y = (2x^2 - 17) \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$

(c) $y = \sin x + \cos^2 x$

(d) $y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

(e) $y = x^2 \sqrt{1 - \ln x}$

(f) $y = (x^2 + 2x - 1)e^{-x^2}$

(g) $y = \frac{x(\ln x - 1)}{1 + \ln x}$

(h) $y = \sin^3 \cos x$

2. Napiši enačbo tiste tangente na graf funkcije $y = 2 + x - x^2$, ki je vzporedna premici $y = x$.
3. Poišči enačbo normale na $y = \sqrt{\ln x}$ v točki $x = e$.
4. Poišči enačbo tangente na elipso $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ v točki $(1, y > 0)$.
5. Pokaži, da se hiperboli $xy = a^2$ in $x^2 - y^2 = b^2$ sekata pod pravim kotom.
6. Približno izračunaj $\sin \frac{2\pi}{9}$.
7. Izračunaj dolžino najdaljše lestve, ki jo lahko vzporedno tlom nesemo po hodniku, ki se ob zavijanju za pravi kot zoža iz a na b metrov.
8. Na paraboli $y^2 = 2px$ poišči točko, ki je najbližje točki $(a, 0)$, $a > 0$.
9. Na paraboli $y = x^2$ poišči točko, ki je najbližje premici $y = 2x - 4$.
10. V lik, ki ga omejujeta $y = 2 - x^2$ in $y = |x|$, vriši pravokotnik tako, da bodo njegove stranice vzporedne koordinatnim osem in bo njegova površina največja možna.

11. Dani elipsi vriši pravokotnik z največjo ploščino tako, da bodo njegove stranice vzporedne osem elipse.
12. Določi točke na krivulji $(x^2 + y^2 - 2x)^2 = 9(x^2 + y^2)$, ki so najbolj in najmanj oddaljene od izhodišča.
13. Točke A , B in C ležijo v ravnini tako, da je kot $\angle ABC$ pravi, razdalja med točkama A in B pa je 200 km. Avto odpelje iz točke A proti točki B s hitrostjo 60 km/h, sočasno pa iz B proti C odpelje vlak s hitrostjo 40 km/h. Čez koliko časa bo razdalja med avtom in vlakom najmanjša?
14. Pokaži, da se funkciji $f(x) = \text{arc tg } x$ in $g(x) = \text{arc tg } \frac{2x}{1-x^2}$ razlikujeta le za konstanto.
15. Poišči ekstreme funkcije $f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$ na intervalu $[0, 2]$.
16. Pokaži, da je dolžina tangente na astroido $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ med koordinatnima osema konstantna.
17. V enakokrak trikotnik z osnovnico c in višino h vrtaj pravokotnik, ki ima osnovnici vzporedni c in največjo ploščino.
18. Cena enote površine valjastega dela silosa je dvakrat nižja od cene enake površine sferne kupole. Pri danem volumnu določi višino in polmer silosa, da bo cena najmanjša.
19. Pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij $\sin x$ in $\cos x$ v točki $\frac{\pi}{4}$?
20. Ribič mora odnesti sporočilo v mesto, ki je na nasprotnem bregu reke, 10 km ob toku navzgor. Reka je široka 200 m in teče 8 km/h. Hitrost čolna je 4 km/h, po bregu pa hodi 5 km/h. Pod kakšnim kotom glede na breg naj izpluje, da bo čim prej prispev?
21. Naj bo $f \in \mathcal{C}^1[0, 1]$ in $f(0) = 0$. Za vsak $x \in [0, 1]$ velja $f'(x) \leq f(x)$. Pokaži, da je $f = 0$.
22. Pokaži, da za $x > 0$ velja

$$\frac{1}{x+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) < \frac{1}{x}.$$

23. Izračunaj vse odvode funkcije $f(x) = \frac{1}{x(1-x)}$.

24. Nariši graf funkcije $y = \frac{x}{\ln x}$. Katero od števil e^π , π^e je večje?

25. Nariši graf funkcije $y = xe^{-x^2-x}$. Kolikokrat seka premico $y = kx$?

26. Koliko ničel ima polinom

$$p(x) = \frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - 1?$$

27. Izračunaj limite:

(a) $\lim_{x \searrow 0} x^x$

(b) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{2x+1}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

(f) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$