Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2014

Kazalo

1. Vaje IŠRM ANA1
Sreda 09.10.2014

(1) Pokaži, da za poljubne tri množice A, B, C velja

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)\,.$$

(2) Pokaži, da za poljubne tri množice A, B, C velja

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,.$$

(3) Izračunaj $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.

(4) Naj bo za vsak $n = 1, 2, 3, \ldots$ podana množica $A_n = [n, n+1]$. Določi množici

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} A_n \qquad \text{in} \qquad \bigcap_{n=1,2,3,\ldots} A_n\,.$$

(5) Naj bo M množica vseh trikotnikov v ravnini, katerih oglišča ležijo na dani krožnici. Določi množici

$$\bigcup_{X \in M} X \qquad \text{in} \qquad \bigcap_{X \in M} X\,.$$

Kakšen je rezultat, če so v M samo enakostranični trikotniki?

(6) Poišči bijektivno preslikavo med naslednjimi množicami:
- (a) $\mathbb{N} \to 7\mathbb{N}$
- (b) $\{a, b, c\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
- (c) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
- (d) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- (e) $(0, 1) \to \mathbb{R}$
- (f) $[0, 1] \to (0, 1)$

(7) Velja naslednji izrek (C.S.B. izrek):

Naj bosta A, B množici ter naj obstajata injektivni preslikavi $f : A \to B$ in $g : B \to A$. Potem obstaja bijekcija $A \xrightarrow{\cong} B$.

S pomočjo zgornjega izreka (na bolj enostaven način) dokaži obstoj bijekcije med množicama $[0, 1]$ in $(0, 1)$.

(8) Naj bo $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$. Pokaži, da velja:
- (i) $g \circ f$ injektivna $\Rightarrow$ f injektivna
- (ii) $g \circ f$ surjektivna $\Rightarrow$ g surjektivna

(9) Naj bo $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ podana s predpisom $f(x) = x^2$. Poišči kakšno funkcijo $h : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ za katero velja

$$f \circ h = \mathrm{id}_{[0,\infty)}\,.$$

(10) Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x, y) = xy$. Poišči kakšno funkcijo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ za katero velja

$$f \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,.$$

(11) Naj bo $f : [0,1] \to [0,2]$ podana s predpisom $f(x) = x$. Poišči kakšno funkcijo $h : [0,2] \to [0,1]$ za katero velja

$$h \circ f = \mathrm{id}_{[0,1]}\,.$$

(12) S pomočjo matematične indukcije pokaži, da velja:

(a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$

(b) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+\ldots+x^{2^n-1}$

(c) $6|n^3 - n$

(d) $7|13^{2n} + 6$

(e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

(f) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

(g) Dokazi Bernoullijevo neenakost: za naravno število n in realno število $a > -1$ velja

$$(1+a)^n \geq 1 + na$$

(h) $n! \leq 2(n/2)^n$

(i) $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20}}}} < 5$ kjer v neenakosti nastopa n korenov

(13) (DN - Problem induktivnega sklepa iz preiskušanja) V Mathematici izračuanj za $n = 1, 2, 3, \ldots$ (do kjer zmoreš) naslednji izraz

$$\mathrm{Ceiling}\left[\frac{2}{2^{\frac{1}{n}} - 1}\right] - \mathrm{Floor}\left[\frac{2n}{\log 2}\right]\,.$$

Nato vstavi $n = 777451915729368$ in nato še $n = 140894092055857794$.