

Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2014

KAZALO

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. Vaje IŠRM ANA1
Sreda 16.10.2014 | 2 |
|---------------------------------------|---|

1. VAJE IŠRM ANA1
SREDA 16.10.2014

- (1) S pomočjo matematične indukcije pokaži, da velja:
- (a) $n! \leq 2(n/2)^n$
 - (b) $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}}} < 5$ kjer v neenakosti nastopa n korenov
- (2) (DN - Problem induktivnega sklepa iz preiskovanja) V Matematici izračunaj za $n = 1, 2, 3, \dots$ (do kjer zmoreš) naslednji izraz
- $$\text{Ceiling} \left[\frac{2}{2^{\frac{1}{n}} - 1} \right] - \text{Floor} \left[\frac{2n}{\log 2} \right].$$
- Nato vstavi $n = 777451915729368$ in nato še $n = 140894092055857794$.
- (3) Pokaži, da je $\sqrt[3]{7}$ iracionalno število.
 - (4) Naj bo $N \in \mathbb{N}$ takšno število, da $N \neq M^2$ za vsak $M \in \mathbb{N}$. Pokaži, da je \sqrt{N} iracionalno število.
 - (5) Dokaži, da obstajata iracionalni števili x in y , da je x^y racionalno število.
 - (6) Naj bo $\frac{p}{q}$ racionalni približek za število $\sqrt{2}$. Pokaži, da je število $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ še boljši racionalni približek za $\sqrt{2}$, ki je nekoliko večji od $\sqrt{2}$.
 - (7) Določi supremum, infimum, maksimum in minimum naslednjih podmnožic v \mathbb{R} :
 - (a) $\{1 + \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
 - (b) $\{x \in (0, 1) \mid x \text{ ima vsaj eno } 1 \text{ v decimalnem zapisu}\}$
 - (c) $\{\frac{1}{1+e^{ax}} \mid x \geq 0\}$
 - (d) $\{\frac{n-\sqrt{n}}{n+1} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
 - (e) $\{\frac{n-2n^2}{n^2+4} \mid n = 1, 2, 3, \dots\}$
 - (f) $\{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
 - (g) $\{\frac{mn}{1+m+n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$
 - (8) Skiciraj množico kompleksnih števil, ki zadošča pogoju:
 - (a) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(z) < \pi, |z| > 3$
 - (b) $|z - i| < 1, |z + i| \leq 1$
 - (c) $|z| + \text{Re}(z) \leq 2$
 - (d) $|\frac{z}{z+1}| = 1, \frac{z}{\bar{z}} = i$
 - (e) $|z| + z = 2 + i$
 - (9) Naj bo $|z| = 1$. Pokaži, da je tudi $|w| = 1$, kjer je $w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
 - (10) Izračunaj $(1 + i\sqrt{3})^{42}$.
 - (11) Reši enačbo $z^3 + 1 - i = 0$.
 - (12) Določi množico kompleksnih števil, ki zadoščajo pogoju $z^5 = \bar{z}^3$.
 - (13) Določi množico kompleksnih števil, ki zadoščajo pogoju $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.