Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2014

Kazalo

1. Naloge za ponavljanje

(1) Razstavi naslednje izraze:
   (a) $a^4 + a^2 + \frac{1}{4}$
   (b) $a^9 - a^6 + \frac{1}{3}a^3 - 27^{-1}$
(2) Poenostavi naslednje izraze:
   (a) $(a^2 + 4a + 4)^2(a^2 + 5a + 6)^{-3}(a^2 + 6a + 9)^2$
   (b) $(a + 1)^{-m+2}((a^2 + 2a + 1)^{\frac{m+1}{2}} - (a^2 + 2a + 1)^{\frac{m-1}{2}})$
   (c) $(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$
   (d) $(\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}})^2$
(3) Reši enačbe
   (a) $x^2 - 10x + 21 = 0$
   (b) $x^2 - x + 1 = 0$
   (c) $(x + 1)(x^2 + x + 1) = (x - 1)(x^2 + 2x + 1)$
   (d) (Obravnavaj) $a(x + a)^2 = (x + 1)^2$
(4) Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bosta rešitvi enačbe ležali na intervalu $[-1, 1]$.
(5) Izračunaj
$$(4x^4 - 3x^3 + x^2 - 1) : (6x^2 + 5x - 7) = ?$$
(6) Poišči ničle polinoma (uporabi Hornerjev algoritem za hitrejše računanje)
$$p(x) = x^6 - 2x^4 + 1\,.$$
(7) Skiciraj grafe funkcij:
   (a) $f(x) = 2 + (x - 1)^3$
   (b) $f(x) = 2x^2 - x^4$
   (c) $f(x) = x + \frac{1}{x}$
   (d) $f(x) = \frac{x^2+9x+8}{4x}$
   (e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$
   (f) $f(x) = \sin(2x)$
   (g) $f(x) = 5\sin(2x - 3)$
   (h) $f(x) = x + \sin x$
   (i) $f(x) = \ln(5 - x)$
   (j) $f(x) = \cosh x$
   (k) $f(x) = e^{-x^2}$
   (l) $f(x) = 2^{-\frac{1}{x^2}}$
   (m) Naloge 107-117
   (n) $f(x) = \ln(\cos x)$
   (o) $f(x) = x\sin\frac{1}{x}$
   (p) $f(x) = \arccos\frac{1}{x}$
   (q) $f(x) = x|x|$
   (r) $f(x) = \sin(\ln|x|)$
(8) Reši enačbe
   (a) $|2x| = |x + 2|$

(b) $\cos^2 x + \cos x = \sin^2 x$
(c) $\cos 5x + \cos x = \cos 3x$

(9) Naj za $x, y, z \in \mathbb{R}$ velja $x + y + z = \pi$. Potem velja

$$\tan x + \tan y + \tan z = \tan x \ \tan y \ \tan z$$

Rešitev: $\tan z = \tan(\pi - (x + y)) = -\tan(x + y)$.

$$\tan x + \tan y - \tan(x + y) = -\tan x \ \tan y \ \tan(x + y)$$

$$\tan x + \tan y = \tan(x + y) - \tan x \ \tan y \ \tan(x + y)$$

$$\tan x + \tan y = \tan(x + y)(1 - \tan x \ \tan y)$$

$$\tan x + \tan y = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \ \tan y}(1 - \tan x \ \tan y)$$

(10) Pokaži, da velja enakost

$$\cos\frac{x}{2} \ \cos\frac{x}{4} \ \cos\frac{x}{8} \cdots = \frac{\sin x}{x}$$

Rešitev: Glej **http://en.wikipedia.org/wiki/Viète's_formula**

(11) Pokaži, da velja enakost

$$1 + \sum_{k=1}^{n} 2\cos(kx) = \frac{\sin((n + \frac{1}{2})x)}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Rešitev: Glej **http://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_kernel**

2. Vaje IŠRM ANA1
Sreda 09.10.2014

(1) Pokaži, da za poljubne tri množice A, B, C velja

$$(A - B) \cap (A - C) = A - (B \cup C)\,.$$

(2) Pokaži, da za poljubne tri množice A, B, C velja

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)\,.$$

(3) Izračunaj $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
Rešitev: $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ in nazadnje $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$.

(4) Naj bo za vsak $n = 1, 2, 3, \ldots$ podana množica $A_n = [n, n+1]$. Določi množici

$$\bigcup_{n=1,2,3,\ldots} A_n \qquad \text{in} \qquad \bigcap_{n=1,2,3,\ldots} A_n\,.$$

(5) Naj bo M množica vseh trikotnikov v ravnini, katerih oglišča ležijo na dani krožnici. Določi množici

$$\bigcup_{X \in M} X \qquad \text{in} \qquad \bigcap_{X \in M} X\,.$$

Kakšen je rezultat, če so v M samo enakostranični trikotniki?

(6) Poišči bijektivno preslikavo med naslednjimi množicami:
(a) $\mathbb{N} \to 7\mathbb{N}$
(b) $\{a, b, c\} \cup \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
(c) $\mathbb{N} \to \mathbb{Z}$
(d) $\mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
(e) $(0, 1) \to \mathbb{R}$
(f) $[0, 1] \to (0, 1)$
Rešitev:
(e) $f(x) = \tan(\pi x - \pi/2)$.
(f) Naj bo $A \subseteq [0, 1]$ podana z $A = \{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$ in $B \subseteq (0, 1)$ z $B = \{1/2, 1/3, 1/4, 1/5, \ldots\}$. Imamo bijekcijo $\bar{f} : A \to B$, podano z $0 \mapsto 1/2$, $1 \mapsto 1/3$, $1/2 \mapsto 1/4$, $1/3 \mapsto 1/5, \ldots$ Iskano prealikavo $f : [0, 1] \to (0, 1)$ sedaj podamo s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} \bar{f}(x) & ; \quad x \in A \\ x & ; \quad x \in A^C \end{cases}$$

(7) Velja naslednji izrek (C.S.B. izrek):

Naj bosta A, B množici ter naj obstajata injektivni preslikavi $f : A \to B$ in $g : B \to A$. Potem obstaja bijekcija $A \overset{\cong}{\to} B$.

S pomočjo zgornjega izreka (na bolj enostaven način) dokaži obstoj bijekcije med množicama $[0, 1]$ in $(0, 1)$.

Rešitev: $f : [0,1] \to (0,1)$, $f(x) = x/2 + 1/4$ je injektivna, ter $g : (0,1) \to [0,1]$, $g(x) = x$ je tudi injektivna. Po CBS izreku torej obstaja bijekcija $[0,1] \to (0,1)$.

(8) Naj bo $f : X \to Y$ in $g : Y \to Z$. Pokaži, da velja:
   (i) $g \circ f$ injektivna $\Rightarrow$ f injektivna
   (ii) $g \circ f$ surjektivna $\Rightarrow$ g surjektivna

(9) Naj bo $f : \mathbb{R} \to [0,\infty)$ podana s predpisom $f(x) = x^2$. Poišči kakšno funkcijo $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ za katero velja
$$f \circ h = \mathrm{id}_{[0,\infty)}\,.$$

(10) Naj bo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ podana s predpisom $f(x,y) = xy$. Poišči kakšno funkcijo $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ za katero velja
$$f \circ h = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}\,.$$

Rešitev: Iskana funkcija je npr. $h(x) = (x,1)$.

(11) Naj bo $f : [0,1] \to [0,2]$ podana s predpisom $f(x) = x$. Poišči kakšno funkcijo $h : [0,2] \to [0,1]$ za katero velja
$$h \circ f = \mathrm{id}_{[0,1]}\,.$$

(12) S pomočjo matematične indukcije pokaži, da velja:
   (a) $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2$
   (b) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^{n-1}}) = 1+x+x^2+\ldots+x^{2^n-1}$
   (c) $6|n^3 - n$
   (d) $7|13^{2n} + 6$
   (e) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$
   (f) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$
   (g) Dokazi Bernoullijevo neenakost: za naravno število n in realno število $a > -1$ velja
$$(1+a)^n \geq 1 + na$$
   (h) $n! \leq 2(n/2)^n$
   (i) $\sqrt{20 + \sqrt{20 + \sqrt{20 + \ldots + \sqrt{20}}}} < 5$ kjer v neenakosti nastopa n korenov

(13) (DN - Problem induktivnega sklepa iz preiskušanja) V Mathematici izračuanj za $n = 1, 2, 3, \ldots$ (do kjer zmoreš) naslednji izraz
$$\mathrm{Ceiling}\left[\frac{2}{2^{\frac{1}{n}} - 1}\right] - \mathrm{Floor}\left[\frac{2n}{\log 2}\right]\,.$$
Nato vstavi $n = 777451915729368$ in nato še $n = 140894092055857794$.

3. Vaje IŠRM ANA1
Sreda 16.10.2014

(1) S pomočjo matematične indukcije pokaži, da velja:
   (a) $n! \leq 2(n/2)^n$
   (b) $\sqrt{20+\sqrt{20+\sqrt{20+\ldots+\sqrt{20}}}} < 5$ kjer v neenakosti nastopa n korenov

(2) (DN - Problem induktivnega sklepa iz preiskušanja) V Mathematici izračunaj za $n = 1, 2, 3, \ldots$ (do kjer zmoreš) naslednji izraz

$$\text{Ceiling}\left[\frac{2}{2^{\frac{1}{n}}-1}\right] - \text{Floor}\left[\frac{2n}{\log 2}\right].$$

Nato vstavi $n = 777451915729368$ in nato še $n = 140894092055857794$.

(3) Pokaži, da je $\sqrt[3]{7}$ iracionalno število.

(4) Naj bo $N \in \mathbb{N}$ takšno število, da $N \neq M^2$ za vsak $M \in \mathbb{N}$. Pokaži, da je $\sqrt{N}$ iracionalno število.

Rešitev: Denimo, da je $\sqrt{N} = \frac{m}{n}$. Od tod dobimo $n^2N = m^2$. Naj bo praštevilo p delitelj števila N. Potem p nastopa liho mnogokrat na levi strani enačbe, ter sodo mnogokrat na desni strani enačbe $\Rightarrow$ protislovje.

(5) Dokaži, da obstajata iracionalni števili x in y, da je x^y racionalno število.

(6) Naj bo $\frac{p}{q}$ racionalni približek za število $\sqrt{2}$. Pokaži, da je število $\frac{p^2+2q^2}{2pq}$ še boljši racionalni približek za $\sqrt{2}$, ki je nekoliko večji od $\sqrt{2}$.

(7) Določi supremum, infimum, maksimum in minimum naslednjih podmnožic v $\mathbb{R}$:
   (a) $A = \{1 + \frac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$
   (b) $A = \{x \in (0, 1) \mid x$ ima vsaj eno 1 v decimalnem zapisu$\}$
   (c) $A = \{\frac{1}{1+e^{ax}} \mid x \geq 0\}$
   (d) $A = \{\frac{n-\sqrt{n}}{n+1} | n = 1, 2, 3, \ldots\}$
   (e) $A = \{\frac{n-2n^2}{n^2+4} | n = 1, 2, 3, \ldots\}$
   (f) $A = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} | m, n \in \mathbb{N}\}$
   (g) $A = \{\frac{mn}{1+m+n} | m, n \in \mathbb{N}\}$

Rešitev:

(b) Za vsako število izberemo decimalni zapis pri katerem se 9 ne ponavlja v neskončnost od nekje naprej. Na ta način dobimo enoličnost decimalnega zapisa za realna števila.

Trdimo, da maksimum in minimum ne obstajata. Res, naj bo $c \in A$ maksimum, potem je število $9/10 + c/10 \in A$ in je večje od c. Podobno, če je $c \in A$ minimum, je $c/10 \in A$ manjše število.

Trdimo, da je supremum enak 1, infimum pa 0. Res, denimo, da je supremum enak $c < 1$. Potem je v decimalnem zapisu $c = 0.c_1c_2c_3\ldots$, kjer nek $c_i \neq 9$. Potem je število $0.c_1c_2\ldots c_{i-1}(c_i + 1)1000\ldots \in A$ in je večje od c. Podobno naj bo infimum enak $c > 0$, $c = 0.c_1c_2c_3\ldots$, kjer je $c_i \neq 0$ za nek i. Potem je število $0.c_1c_2\ldots(c_i - 1)10000\ldots \in A$ in je manjše od c.

(f) A ni navzgor omejena, saj za $m = 1$ dobimo števila oblike $\frac{1}{n} + 4n$, ki so očitno lahko poljubno velika, torej max in sup ne obstajata. Za min in inf najprej preoblikujemo v

$$\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} = \frac{m^2 + 4n^2}{mn} = \frac{1 + 4\left(\frac{n}{m}\right)^2}{\frac{n}{m}}$$

Če označimo z $x = \frac{n}{m}$, dobimo izraz $\frac{1+4x^2}{x}$, za katerega (npr. s pomočjo odvoda) preverimo, da ima globalni minimum, ki je enak 4 pri $x = \frac{n}{m} = \frac{1}{2}$. Torej inf=min=4.

(8) Skiciraj množico kompleksnih števil, ki zadošča pogoju:
   (a) $\frac{\pi}{3} \leq \arg(z) < \pi$, $|z| > 3$
   (b) $|z - i| < 1$, $|z + i| \leq 1$
   (c) $|z| + \mathrm{Re}(z) \leq 2$
   (d) $|\frac{z}{z+1}| = 1$, $\frac{z}{\bar{z}} = i$
   (e) $|z| + z = 2 + i$

(9) Naj bo $|z| = 1$. Pokaži, da je tudi $|w| = 1$, kjer je $w = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$.

(10) Izračunaj $(1 + i\sqrt{3})^{42}$.

(11) Reši enačbo $z^3 + 1 - i = 0$.

(12) Določi množico kompleksnih števil, ki zadoščajo pogoju $z^5 = \bar{z}^3$.

(13) Določi množico kompleksnih števil, ki zadoščajo pogoju $(z + i)^n + (z - i)^n = 0$.