Vaje ANA1 išrm 1.Letnik 2014

Kazalo

1. Vaje IŠRM ANA1
Sreda 05.11.2014

(1) Izračunaj limite zaporedij
  (a) $a_n = (\frac{n-2}{n+1})^{2n+1}$
  (b) $a_n = (1 + \frac{n-1}{n+1})^{\frac{n+1}{n-1}}$
  (c) $a_n = (\frac{n^2+4n}{n^2-n+1})^{n+3}$

(2) Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zaporedje s strogo pozitivnimi členi, in naj velja $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$. Pokaži:
  (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$
  (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \alpha$.
  (c) S pomočjo prejšnje točke izpelji enakost $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

(3) Izrazi eksplicitno kot $a_n = f(n)$, zaporedje $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+a_n}{2}$, kjer je $a_0 = 1$ in $a_1 = 1$. Nasvet: vstavi $a_n = \alpha^n$ in izračunaj α-e in vzemi linearno kombinacijo.

(4) Naj bo $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentno zaporedje. Pokaži, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_n$$

(5) Naj bo $a_1 > b_1 > 0$ in naj bosta dani zaporedji $a_{n+1} = \frac{a_n^2+b_n^2}{a_n+b_n}$, $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$.
  (a) Pokaži, da velja $a_n \geq b_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.
  (b) Pokaži, da je a_n padajoče in b_n naraščujoče zaporedje.
  (c) Utemelji, da sta zaporedji konvergentni in nato pokaži, da imata skupno limito.

(6) Naj bo $c \in \mathbb{C}$ in z_n zaporedje kompleksnih števil podano s predpisom

$$z_0 = 0 \qquad z_{n+1} = z_n^2 + c$$

Pokaži: če je $|c| \leq \frac{1}{4}$, potem je zaporedje z_n omejeno.
(Namig: z indukcijo preveri, da je $|z_n| \leq \frac{1}{2}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.)