IŠRM, Analiza 1, 2010/2011

Vaje za 1. kolokvij

Za večino računskih nalog lahko poiščete odgovore, nasvete ali rešitve v zbirki NALOGE IZ ANALIZE 1 Z ODGOVORI, NASVETI IN REŠITVAMI Barbare Drinovec-Drnovšek in Saša Strleta.

1. S popolno indukcijo pokaži, da za vsako naravno število n veljata enakosti

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2\,,$$

$$1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{(2n-1)2n(2n+1)}{6}\,.$$

2. Dokaži, da je za vsako naravno število $n\geq 2$ število $2^{2^n}-1$ deljivo s 15.

3. Pokaži, da za vsako realno število x in za vsako naravno število n velja

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^{n-1}})=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{2^n-2}+x^{2^n-1}\,.$$

4. Pokaži, da za vsako celo število n obstajata celi števili a in b, da velja $(1+\sqrt{2})^n=a+b\sqrt{2}\,.$

5. Pokaži, da je za vsako naravno število n izraz $2^{2n+1}-9n^2+3n-2$ deljiv s 54.

6. Naj bo $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{k\pi}{2^m}|k\in\mathbb{Z},m\in\mathbb{N}\}$. Pokaži, da za vsako naravno število $n\in\mathbb{N}$ velja

$$\frac{1}{\sin 2\alpha}+\frac{1}{\sin 2^2\alpha}+\cdots+\frac{1}{\sin 2^n\alpha}=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}-\frac{1}{\operatorname{tg}2^n\alpha}.$$

7. Naj bo $h\in[0,1]$. Pokaži, da za vsak $n\in\mathbb{N}$ velja $(1+h)^n\leq 1+(2^n-1)h$.

8. Pokaži, da je za vsako naravno število n število $1+2^{3n+1}+2^{6n+2}$ deljivo s 7.

9.* Pokaži, da za vsako naravno število n, velja

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2^n-1}\leq n\,.$$

10. Poišči vse realne x, ki ustrezajo neenačbi

$$\frac{x^2+10x-29}{x^2-15x+26}>-1\,.$$

11. Reši neenačbe:

(a) $|x-1|<x+4$ (b) $|2x-3|<x^2$ (c) $|x+|2x+4||\geq 2$

(d) $|x-1|-|x+2|<3$ (e) $\left|\frac{x}{x+4}\right|\geq 1$ (f) $\left|\frac{x+4}{3x+2}\right|>\frac{1}{x}$

(g) $\Big||x+1|-|2x-1|\Big|\leq 1$ (h) $|x^2-x|-|x|<8$ (i) $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{3}{\sqrt{5}}$

(j) $\sqrt{2x+1}<\frac{x+2}{2-x}$ (k) $\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}>1$ (l) $x+\frac{x+2}{\sqrt{x+1}}\geq 2$

12. Določi supremum, infimum, minimum in maksimum naslednjih množic, če obstajajo.

(a) $A=\{x^2-6x\,;\,x>0\}$ (b) $B=\left\{\frac{2n-3}{n}\,;\,n\in\mathbb{N}\right\}$

(c) $C=\{x\in[1,3]\,;\,x$ ima v decimalnem zapisu vsaj dve trojki$\}$

(d) $D=\left\{\frac{2}{1+x^2}-1\,;\,x\in\mathbb{R}\right\}$ (e) $E=\left\{\frac{m-2m^2}{m^2+4}\,;\,m\in\mathbb{N}\right\}$

13. Poenostavi naslednje izraze:

(a) $(3+4i)\overline{(1-3i)}$ (b) $\frac{7-3i}{1+i}$ (c) $(1+i\sqrt{3})^{10}$

14. Zapiši vse vrednosti izraza $\sqrt[7]{(-\sqrt{3}-i)^5}$ in jih nariši.

15. Skiciraj naslednje podmnožice kompleksnih števil.

(a) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,\frac{\pi}{3}\leq \arg z<\pi,\ |z|>3\}$ (b) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z+3-4i|>2\}$

(c) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-2|=|z+3i|\}$ (d) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,|z-1|+|z+5|\leq 10\}$

(e) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,2(\operatorname{Re}z)^2+\operatorname{Im}z<1\}$ (f) $\{z\in\mathbb{C}\,;\,\operatorname{Re}z^2+4\operatorname{Im}z=0\}$

16. Naj bo $k\neq 0$ realno število. Za katere k je $1+ik$ bliže izhodišču kot $1-\frac{i}{k}$?

17. Izračunaj množice kompleksnih števil z, ki zadoščajo enačbam. Množice rešitev nariši.
(a) $z^3 = -2+2i$ (b) $z^5 = \bar{z}^3$ (c) $z^3+3z^2+3z+i=0$
(d) $z^8+(3+i)z^4-4+4i$ (e) $z^6+(5+(3\sqrt{3}-2)i)z^3+6(1+\sqrt{3})+6(\sqrt{3}-1)i=0$
Pri (c) si pomagaj z izrazom $(z+1)^3$, pri (d) in (e) pa s kvadratno enačbo.

18. Poišči vse rešitve enačbe

$$w^3+2w^2+4w+8=0.$$

Pomagaj si s formulo za razcep izraza w^4-b^4.

19. Naj bo $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$. V polarni obliki zapiši vse rešitve enačbe

$$z^7+z^5a+z^3a^2+za^3=0.$$

20. Poišči vsa kompleksna števila z, za katera je $\left(\dfrac{z-i-1}{iz+1}\right)^2$ realno število.

21. Naj bosta z,w kompleksni števili. Pokaži:
(a) Če je $|z|=1$ in $|w|\neq 1$, potem je $\left|\dfrac{z-w}{1-z\bar{w}}\right|=1$.
(b) Paralelogramska enakost: $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$.
(c) $|1-\bar{z}w|^2-|z-w|^2=(1+|zw|)^2-(|z|+|w|)^2$.
(d) Če velja $\operatorname{Re} z, \operatorname{Re} w>0$, potem je $\left|\dfrac{z-w}{\bar{z}+w}\right|<1$.

22. Naj bo $a_n=\dfrac{2}{3n+7}$. Napiši nekaj členov zaporedja a_n. Ugotovi, ali je zaporedje navzgor omejeno, navzdol omejeno, naraščajoče, padajoče in, ali je konvergentno. Če konvergira, izračunaj limito.

23. Naj bo $a_1=1$ in naj za vsako naravno število n velja

$$a_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n^2+a_n+6).$$

Pokaži, da je zaporedje a_n naraščajoče in navzgor omejeno. Utemelji, da je konvergentno in izračunaj limito. Kaj pa če vzamemo drug začetni člen $a_1>0$?

24. Naj bo $x_1=3$ in za $n\in\mathbb{N}$

$$x_{n+1}=3+\frac{4}{3+\frac{4}{x_n}}.$$

Pokaži, da je zaporedje x_n monotono in omejeno (pomagaj si s kandidatom za limito). Utemelji, da je konvergentno in določi limito.

25. Zaporedje a_n je podano z začetnim členom $a_1=\frac{3}{2}$ in rekurzivno zvezo $a_{n+1}=2-2a_n+a_n^2$. Dokaži, da je zaporedje a_n konvergentno in izračunaj limito.

26. Naj bo $a_n=\dfrac{1}{\sqrt{n^4+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^4+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^4+3n^2}}$ za $n\in\mathbb{N}$. Dokaži, da je zaporedje a_n konvergentno in izračunaj limito.

27. Izračunaj limito zaporedja $\dfrac{2n+3\sin(3n)}{3n-\sqrt{n}\cos n}$.

28. Če obstajajo, izračunaj limite zaporedij:
(a) $\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{4},\dfrac{5}{4},\dfrac{5}{6},\ldots$ (b) $0.2, 0.21, 0.212, 0.2121,\ldots$ (c) $\sin 1, \cos(\sin 1), \sin(\cos(\sin 1)),\ldots$

29. Izračunaj limite zaporedij:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-3}{n+2}$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+4}$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-1}{n+5}$
(d) $\lim\limits_{n\to\infty}(n\sqrt{n^2+4}-n^2)$ (e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$ (f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$

30. Izračunaj limite zaporedij:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{n}\right)^n$ (b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n-1}{n+2}\right)^n$ (c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{n^2-2}\right)^{n^2}$

31. Skiciraj naslednje ravninske množice in dokaži, da so zaprte:
(a) $\{(x,y)\,|\,y\geqslant 2-3x\}$ (b) $\{(x,y)\,|\,y\geqslant 2-3x \text{ in } \leqslant 2x+3\}$ (c) $\{(x,y)\,|\,1\leqslant(x-1)^2+y^2\leqslant 4\}$

32. Podana je ravninska množica

$$A = \{(x, y) \mid 3 < \sqrt{x^2 + y^2} < 4 \text{ in } y > 1\}.$$

Določi zaprtje $\bar{A}$ in ugotovitev z vso strogostjo utemelji.

33. Podana je ravninska množica

$$A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 9 \text{ in } |x| < 1\}.$$

Določi zaprtje $\bar{A}$ in ugotovitev z vso strogostjo utemelji.

34. Naj bosta U odprta množica v $\mathbb{R}^m$ in V odprta množica v $\mathbb{R}^n$. Dokaži, da je $U \times V$ odprta množica v $\mathbb{R}^{m+n}$. (Začni s primerom $m = n = 1$.)

35. Skiciraj ravninsko množico

$$A = \{(x, y) \mid, |x| \geqslant 1 \text{ in } |y| \geqslant 2\}$$

in dokaži, da je zaprta.

36. Naj bosta A in B podmnožici evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$, Dokaži, da velja $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ in s primerom pokaži, da **ne** velja $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

37. Podane so ravninske množice:
$A = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 2)\big((x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2\big) > 0\}$,
$B = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 2)\big((x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2\big) \geqslant 0\}$,
$C = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 2)\big((x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2\big) < 0\}$,
$D = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 - 2)\big((x^2 + y^2)^2 - 3(x^2 + y^2) + 2\big) \leqslant 0\}$.
Skiciraj jih v ravnini in primerjaj $\bar{A}$ z množico B ter $\bar{C}$ z množico D.

38. Naj bosta A in B podmnožici evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$. Dokaži: Če je A zaprta, B pa kompaktna, je $A \cap B$ kompaktna množica.

39. Naj bo A kompaktna podmnožica evklidskega prostora $\mathbb{R}^n$ in naj točka b ne pripada množici A. Dokaži, da obstaja taka točka $a_0 \in A$, da velja $\|b - a_0\| \leqslant \|b - a\|$ za vsako (drugo) točko $a \in A$.
Navodilo: S pomočjo natančne spodnje meje za množico

$$\{\|b - a\| \mid a \in A\}$$

konstruiraj primerno zaporedje v A.

40. Posploši prejšnjo nalogo na primer zaprte množice A tako, da pokažeš, da lahko A zamenjaš s primerno kompaktno množico.