

Vaje za 2. kolokvij

Za večino računskih nalog lahko poiščete odgovore, nasvete ali rešitve v zbirki NALOGE IZ ANALIZE 1 Z ODGOVORI, NASVETI IN REŠITVAMI Barbare Drinovec-Drnovšek in Saša Strleta.

1. Ugotovi ali obstajajo limite in če obstajajo, jih izračunaj:

- | | | | |
|--|--|---|--|
| (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ | (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ | (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y}{2x^6+y^3}$ | (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^6y^3}{2x^6+y^3}$ |
| (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^3}{2x^6+y^3}$ | (f) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4y^2}{2x^6+y^3}$ | (g) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2xy(x+y)}{x^2+y^2}$ | (h) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$ |
| (i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2-y^2}$ | (j) $\lim_{(x,y) \rightarrow (\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}})} \frac{\ln(\tg(\pi(x^2+y^2)))}{\cos(2\pi(x^2+y^2))}$ | | |

2. Izračunaj odvod funkcije $y = f(x)$, kjer je f dana s spodnjim predpisom.

- | | | |
|---|---|---|
| (a) $x \log_3(x + \sqrt{x^2 + 1})$ | (b) $\frac{x^2 \sin^3 x}{1 + \tg x}$ | (c) $\ln \frac{(x^2 + 2)^9 \arccos x}{x^e e^x}$ |
| (d) $\sin \left(\frac{\cos(x^2)}{\sqrt[3]{x}} \right)$ | (e) $\frac{\arcsin(2x) + \ln(\arccos x)}{x^e + e^x}$ | (f) $(1 + x)^{1/x}$ |
| (g) $\tg x \arctg(1 - x^2)$ | (h) $\frac{e^{\sqrt{3}} - \sqrt{3}^x}{e - x}$ | (i) $e^x \ln^2(\cos^3(\ln x))$ |
| (j) $x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x}$ | (k) $\arctg e^x - \ln \sqrt{\frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1}}$ | (l) $\cos(2 \arcsin x)$ |

3. Določi vse tangente na graf funkcije $f(x) = x^3 - 6x^2 + 10x - 4$, ki z abscisno osjo oklepajo kot $\frac{\pi}{4}$.

4. Pod kakšnim kotom se sekata grafa funkcij $f(x) = x^3 + x$ in $g(x) = 2x^2 + 2$?

5. S pomočjo diferenciala izračunaj približke za naslednje izraze.

- (a) $\arctg 1, 101$ (b) $\arcsin 0, 48$

6. Izračunaj približno vrednost funkcije $f(x) = \sqrt[5]{\frac{2-x}{2+x}}$ v točki $-0,05$ z uporabo diferenciala.

7. Po definiciji preveri, da je dana funkcija odvedljiva v $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \pi(\sqrt{x+1} - 1) & ; \quad -1 < x \leq 0 \\ x \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) & ; \quad x > 0 \end{cases}$$

8. Določi konstanti $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & ; \quad x < \frac{\pi}{4} \\ ax + b & ; \quad x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

odvedljiva na \mathbb{R} . Ali je potem f tudi zvezno odvedljiva?

9. Za $a, b, c \in \mathbb{R}$ naj bo funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & ; \quad x < 1 \\ e \ln x & ; \quad 1 \leq x \leq e^3 \\ c \sqrt[3]{x} & ; \quad x > e^3 \end{cases} .$$

(a) Določi a, b, c tako, da bo f zvezno odvedljiva na \mathbb{R} .

(b) Pokaži, da obstaja inverzna funkcija f^{-1} .

(c) Izračunaj $(f^{-1})'(2e)$.

(d) Izračunaj f^{-1} .

10. Za katere $a, b \in \mathbb{R}$ je

$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin \frac{1}{x} & ; \quad x \neq 0 \\ b & ; \quad x = 0 \end{cases}$$

zvezno odvedljiva na \mathbb{R} ?

11. Poišči globalne ekstreme funkcije $f(x) = x^{2/3}(5 - x)$ na intervalu $[-1, 4]$.

12. Naj bo funkcija $f : (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ določena s predpisom

$$f(x) = x^4 e^x .$$

Določi zalogo vrednosti funkcije f . (Pomagaj si z globalnimi ekstremi.)

13. Sliko, ki je visoka 140 cm, obesimo na steno. Spodnji rob slike je 180 cm nad očmi gledalca. Kako daleč od stene se mora gledalec postaviti, da bo videl sliko pod največjim zornim kotom?

14. V elipso, ki je dana z enačbo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, včrtamo pravokotnik s stranicami vzporednimi koordinatnima osema in največjo ploščino. Izračunaj njegovi stranici.

15. Iz pravokotnika s stranicama 5 cm in 8 cm ob vsakem oglišču izrežemo kvadratki, nato pa iz ostanka sestavimo škatlo (brez pokrova). Kolikšna je ploščina osnovne ploskve škatle, ko je prostornina škatle največja?

16. Iz kroga z radijem 1 izrežemo izsek in preostanek zvijemo v stožec. Kolikšen naj bo kot izseka, da bo imel dobljeni stožec največjo prostornino?

17. Dokaži, da za vsaka $x, y \in \mathbb{R}$ velja $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$. Pomagaj si z Lagrangevim izrekom.

18. Dokaži, da za vsaka $x, y \in (-\infty, 0]$ velja $|e^x - e^y| \leq |x - y|$.

19. Naj bo $a > 0$. Dokaži, da za poljubna $x, y \in \mathbb{R}$ velja

$$\left| \ln \frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{y + \sqrt{a^2 + y^2}} \right| \leq \frac{|x - y|}{a}.$$

Pomagaj si s funkcijo $f(x) = \ln(x + \sqrt{a^2 + x^2})$.

20. Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x - 1}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{e^x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[5]{x - 1}}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x \operatorname{arctg} 3x}{\sin 5x}$

(f) $\lim_{x \downarrow 0} x \ln^3 x$

(g) $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$

(i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x^6 + x^2 + 1}$

(j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{(e^x - 1)^2}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+e^x}{2 \sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{x} - \frac{\ln(1+ax)}{x^2} \right)$

(n) $\lim_{x \downarrow 0} x^{\frac{1}{1-x}}$

(o) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

21. Izračunaj naslednje limite.

(a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - 2^x}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow e} (\ln x)^{1/(x-e)}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1+x^2} \cos x}{x^4}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x^2 - \frac{4x-4}{x+1}}{\sin^3(\pi x)}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2 \arccos x) - 2x}{x^3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0} (x + e^x)^{1/x}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{\sin(\pi x)} + \frac{\cos(\pi x)}{\pi(1-x)} \right)$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n}{x^n}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(m) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x + 3} - \sqrt{x^2 - 2x + 3} \right)$

22. Čim bolj natančno nariši graf funkcije f (določi definicijsko območje, ničle, simetrijo, periodičnost, limite na robu definicijskega območja in asimptote, intervale naraščanja in padanja, lokalne ekstreme; če je smiselno, določi tudi intervale konveksnosti in konkavnosti ter prevoje). Natančno opiši obnašanje v bližini ‘zanimivih’ točk.

(a) $f(x) = x^4 - x^2$

(b) $f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 + 1}$

(c) $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$

(d) $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$

(e) $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

(f) $f(x) = x(\ln x)^2$

(g) $f(x) = x \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}$

(h) $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$

(i) $f(x) = xe^{-1/x^2}$

(j) $f(x) = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2}}$

(k) $f(x) = x^{2/3}(1-x)^{2/3}$

(l) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-3}} - x$

23. Nariši krivuljo, podano v parametrični obliki.

(a) $x(t) = t^3 + 3t + 1, y(t) = t^3 - 3t + 1$.

(b) $x(t) = t^4 + 1, y(t) = \frac{t}{t^2 + 1}$

(c) $x(t) = te^t, y(t) = te^{-t}$

(d) $x(t) = \operatorname{tg} t, y(t) = \frac{1}{\sin t}$

(e) $x(t) = \frac{t^2}{t-1}, y(t) = \frac{t}{t^2-1}$

(f) $x(t) = \sin(2t), y(t) = \sin^2 t$