

Vaje: Zveznost

1. Ali je funkcija $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ zvezna v točki 0?

2. Ali je funkcija $f(x) = \frac{x-1}{x+2}$ zvezna v točki 2?

3. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana s pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}, \\ \frac{1}{n}; & x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, x = \frac{m}{n}, D(m, n) = 1. \end{cases}$$

Pokaži, da je f zvezna na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cup \{0\}$, drugje pa ni zvezna.

4. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je definirana s pravilom

$$f(x) = \begin{cases} 0; & x \in \mathbb{Q}, \\ x; & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Pokaži, da je funkcija f zvezna le v 0.

5. Pokaži, da je funkcija $\sqrt[3]{x}$ zvezna povsod na \mathbb{R} .

6. Določi k tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}; & x \neq -1, \\ k; & x = -1. \end{cases}$$

zvezna na \mathbb{R} .

7. Določi k tako, da bo funkcija

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arc tg} (1 + \frac{1}{x}); & x \neq 0, \\ k; & x = 0. \end{cases}$$

zvezna na \mathbb{R} .

8. Izberi $a, b \in \mathbb{R}$ tako, da bo zvezna funkcija

$$f(x) = \begin{cases} -2 \sin x; & x \leq -\frac{\pi}{2}, \\ a \sin x + b; & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}, \\ \cos x; & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

9. Kje je zvezna funkcija

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+x^n}?$$

10. Določi $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo funkcija $\operatorname{tg} x + a \operatorname{tg} 3x$ imela končno limito, ko gre $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$.
11. Pokaži, da je zvezna injektivna funkcija na zaprtem intervalu strogo monotona.
12. Funkcija $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ je zvezna. Pokaži, da obstaja tak $a \in [0, 1]$, da je $f(a) = a$.
13. Pokaži, da ima enačba $x \cdot 2^x = 1$ rešitev na intervalu $[0, 1]$.
14. Funkcija $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ je zvezna, $f(2) = 1$. Za vsak $x \in [0, 1]$ velja

$$f(2x) = f(x)(3 - f(2x)).$$

Pokaži, da je $f(0) = 0$. Nato pokaži, da obstaja takšen $a \in (0, 1)$, da je $f(a) = \frac{1}{10}$.

15. Izračunaj limite:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}$
- (b) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^m - a^m}{x - a}$, $m \in \mathbb{N}$
- (c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$
- (d) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$
- (e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}$
- (f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x - 1}{x^{50} - 2x - 1}$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + e^{\frac{1}{x}})^{-1}$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x}$

- (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}$
- (j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{(\frac{\pi}{2} - x)^2}$
- (k) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x + h) - \cos x}{h}$
- (l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x}, a > 0$
- (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2(x + \sqrt[3]{1 - x^3})$
- (n) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$
- (o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$
- (p) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$
- (q) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 2x + 1)}{\ln(x^5 + 5x + 1)}$
- (r) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$
- (s) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{\sin x}}$
- (t) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2 e^x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$
- (u) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{2} x}$
- (v) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$
- (w) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1 + 3x^4} - \sqrt[3]{1 - 3x}}{\sqrt{1 - x} - \sqrt[4]{1 + x}}$
- (x) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x^{\frac{1}{\sin^2 x}}$
- (y) $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$