Fakulteta za računalništvo in informatiko
3. izpit iz Analize 2 UNI

1. 9. 2006

OCENJEVALNI

Ime in Priimek: VZOREC

Vpisna številka:

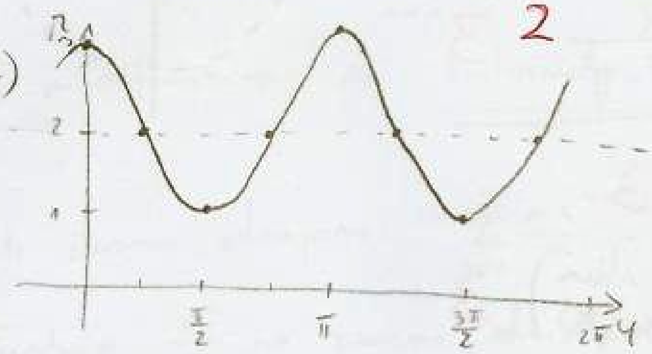
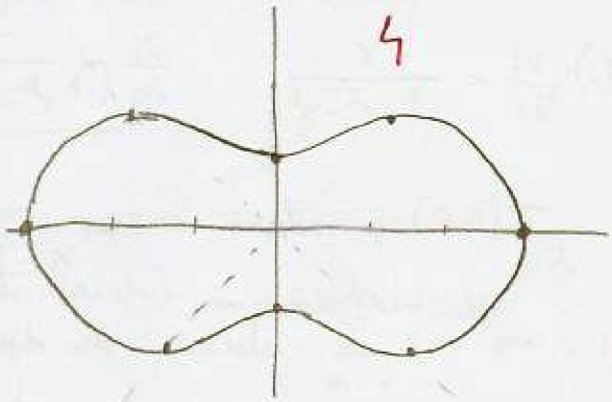
Naloga 1. Krivulja v ravnini je podana z enačbo

$$r(\phi) = 2 + \cos(2\phi) .$$

a) Skiciraj krivuljo.

b) Poišči točke na krivulji, ki so najbolj oddaljene od izhodišča, ter tiste, ki so najmanj oddaljene od izhodišča.

c) V katerih točkah je krivulja vzporedna z y osjo?

a)  2  4

c) $x(\varphi) = (2+\cos 2\varphi)\cos\varphi$

$y(\varphi) = (2+\cos 2\varphi)\sin\varphi$

2 → $\dot{x} = 0$

$\dot{x} = -2\sin 2\varphi\cos\varphi - (2+\cos 2\varphi)\sin\varphi$

$\dot{x} = -2\sin\varphi\cos^2\varphi - 2\sin\varphi - \cos 2\varphi\sin\varphi =$

$= \sin\varphi\left(-2\cos^2\varphi - 2 - \cos 2\varphi\right) =$

3 → $= -\sin\varphi\,\underbrace{\left(3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2\right)}$

$\boxed{\text{to ni nikoli ničla, saj je } 3\cos^2\varphi - \sin^2\varphi \geq -1}$ 3

$\dot{x} = 0 \iff \sin\varphi = 0$

$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \varphi_1 = 0 \to T_1(3,0) \\ \varphi_2 = \pi \to T_2(-3,0)\end{array}\right\}$ 2

b) $\dot{r} = -2\sin 2\varphi = 0$ ← 3

$\sin 2\varphi = 0$

$2\varphi = k\pi \; ; \; k \in \mathbb{Z}$

$\varphi = \frac{k\pi}{2}$ ← 3

drugi odvod ali uporaba slike za klasifikacijo ekstremov ← 3

Naloga 2. Dana je funkcija dveh spremenljivk

$$f(x,y) = \log\sqrt{e^2 - x^2 - y^2}.$$

a) Skiciraj definicijsko območje funkcije f.

b) Poišči in klasificiraj ekstreme funkcije f.

c) Skiciraj nekaj nivojnic in ploskev, določeno z grafom funkcije f.

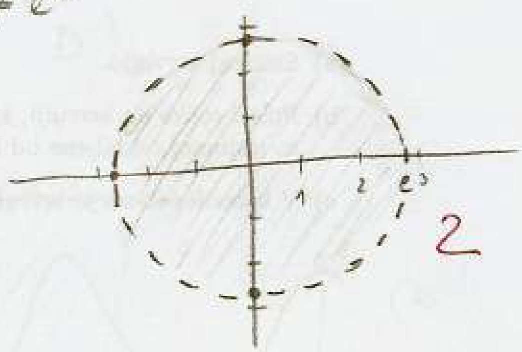
a) $e^2 - x^2 - y^2 \geq 0$ (ker je pod korenom)

3 $\underline{x^2+y^2 \leq e^2}$

$\sqrt{e^2-x^2-y^2} \neq 0$ (ker je pod log) 3

$\Rightarrow x^2+y^2 \neq e^2$

$\underline{x^2+y^2 < e^2}$



2

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{e^2-x^2-y^2}$ $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{e^2-x^2-y^2}$ 3

$T(0,0)$ je edini ekstrem. 3

je maksimum (Hesse ali slika iz točke c)) 3

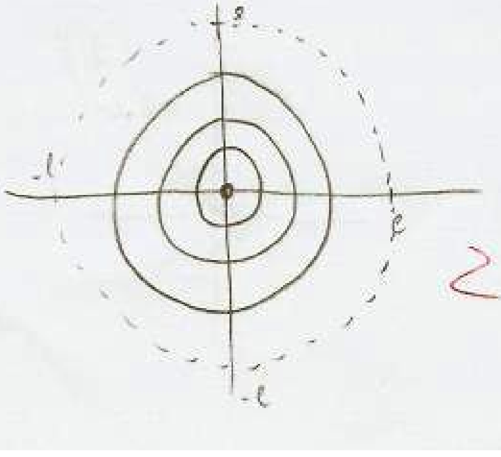
c) $Z_f = (0,1]$ 1

nivojnica pri 1: $\log\sqrt{e^2-x^2-y^2} = 1 \Rightarrow x=y=0$

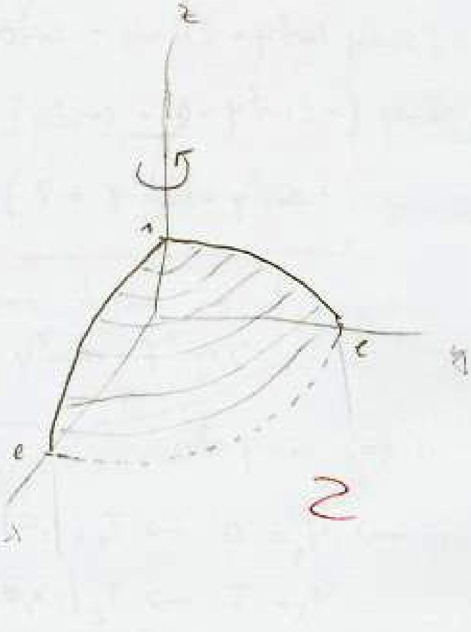
nivojnica pri $\frac{1}{2}$: $\log\sqrt{e^2-x^2-y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow e^2-x^2-y^2 = e \Rightarrow x^2+y^2 = e^2-e$ 1

...

nivojnice so krožnice okoli izhodišča in točka $T(0,0)$ 2



2



2

Naloga 3. Funkcija f je podana z vrsto:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \tag{1}$$

a) Določi definicijsko območje funkcije f (drugače povedano: ugotovi, za katere x vrsta konvergira)

b) Odvajaj funkcijsko vrsto (ne pozabi komentirati, zakaj to lahko storiš), dobljeno vrsto seštej in rezultat integriraj.

c) Izrazi funkcijo f z elementarnimi funkcijami.

a) Gre za potenčno vrsto, poračunamo konvergenčni radij:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 \Rightarrow \underline{R = 1}$$ 5

Robne točke: • 1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ne konvergira (harmonična vrsta) 3

• -1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira (Leibnizov kriterij)

f je definirana na $\underline{\text{intervalu } [-1, 1)}$ 2

b) Vrsto členoma odvajamo: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ 3

Funkcije $\frac{x^n}{n}$ so zvezno odvedljive $(n \geq 1)$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ pa enakomerno konvergira na $(-1, 1)$, zato velja: 5

2 $$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-x} \quad (\text{na } (-1,1))$$

3 $$f(x) = \int \frac{1}{1-x}\,dx = \int \frac{dx}{1-x} = -\log(1-x) + C$$

$$f(0) = 0 = 0 + C \Rightarrow C = 0$$

$$\boxed{f(x) = \log \frac{1}{1-x}}$$ 2

Naloga 4. Zapiši lomljeno linearno kompleksno transformacijo ψ, ki območje $D = \{z \in \mathbb{C},\ |z| > 1\}$ preslika bijektivno na območje $D' = \{z \in \mathbb{C},\ |z + i - 1| < 2 \text{ in } z \neq 1 - i\}$. Pri razmisleku si lahko pomagaš z reševanjem spodnjih podproblemov.

a) Skiciraj območji D in D'.

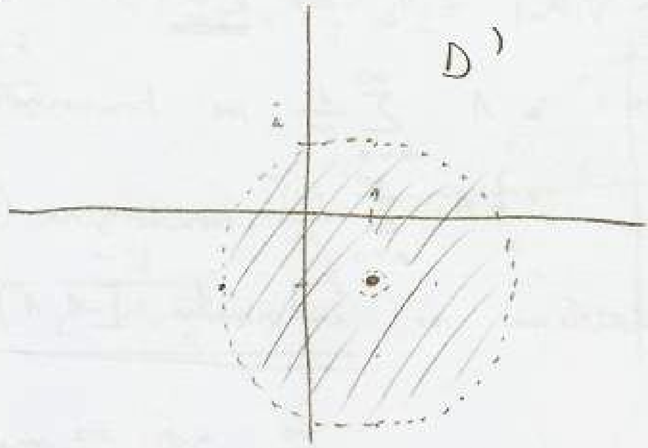
b) Konstruiraj kompleksno preslikavo h, ki območje D preslika na enotsko krožnico brez izhodišča.

c) Konstruiraj kompleksno preslikavo g, ki preslika enotsko krožnico v krožnico s polmerom 2 in središčem v izhodišču.

d) Konstruiraj kompleksno preslikavo f, ki preslika središče koordinatanega sistema v točko $1 - i$.

e) Zapiši kompozitum preslikav f, g in h ter utemelji, zakaj je ta kompozitum ravno iskana preslikava ψ.

5 a)



5 b) $h(z) = \frac{1}{z}$

5 c) $g(z) = 2z$

5 d) $f(z) = z + 1 - i$

5 e) $\psi(z) = (f \circ g \circ h)(z) = \frac{2}{z} + 1 + i$