ANALIZA II

5. april 2006

Vpisna številka:
Ime in priimek:
Predavalnica: Vrsta: Sedež:

1. Poišči vse rešitve enačbe $(z-i)^4 = z^4$ in jih nariši.

Rešitev:

$$(z-i)^4 = z^4$$

Ker $z = 0$ očitno ni rešitev, je zgornja enačba ekvivalentna naslednji.

$$\left(\frac{z-i}{z}\right)^4 = 1$$

Iščemo torej vse četrte korene enice. To bo še bolj očitno, če uvedemo novo spremenljivko

$$\xi = \frac{z-i}{z}.$$

Najprej torej rešimo enačbo

$$\xi^4 = 1\ .$$

Rešitve so znane.

$$\xi_k = \cos\frac{k\pi}{2} + i\sin\frac{k\pi}{2}, \qquad k = 0, 1, 2, 3\ .$$

Konkretno zapisano, $\xi_0 = 1, \xi_1 = i, \xi_2 = -1$ in $\xi_3 = -i$. Rešitve za z torej dobimo z reševanjem naslednjih enačb:

$$\frac{z-i}{z} = 1,\ \frac{z-i}{z} = i,\ \frac{z-i}{z} = -1 \ \text{ in } \ \frac{z-i}{z} = -i.$$

Prva enačba nima končne rešitve($z \to \infty$), iz ostalih treh pa dobimo rešitve

$$z_1 = \frac{i}{1-i},\ z_2 = \frac{i}{2} \text{ in } z_3 = \frac{i}{1+i}.$$

2. Ugotovi za kakšen kot je zarotirana parabola

$$x^2 + 2xy + y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0$$

in jo nariši.

Rešitev: Koordinatni sistem bomo zavrteli za kot ϕ, ki ga bomo izbrali tako, da bo v zavrtenem koordinatnem sistemu parabolo opisovala čimbolj enostavna enačba. To storimo s pomočjo novih koordinat.

$$x = X\cos(\phi) - Y\sin(\phi)$$
$$y = X\sin(\phi) + Y\cos(\phi)$$

Nove koordinate vstavimo v enačbo in malo uredimo.

$$X^2(\cos\phi + \sin\phi)^2 + 2XY(\cos^2\phi - \sin^2\phi) + Y^2(\sin\phi - \cos\phi)^2 + \cdots$$
$$\cdots + \sqrt{2}X(\cos\phi - \sin\phi) - \sqrt{2}Y(\cos\phi + \sin\phi)$$

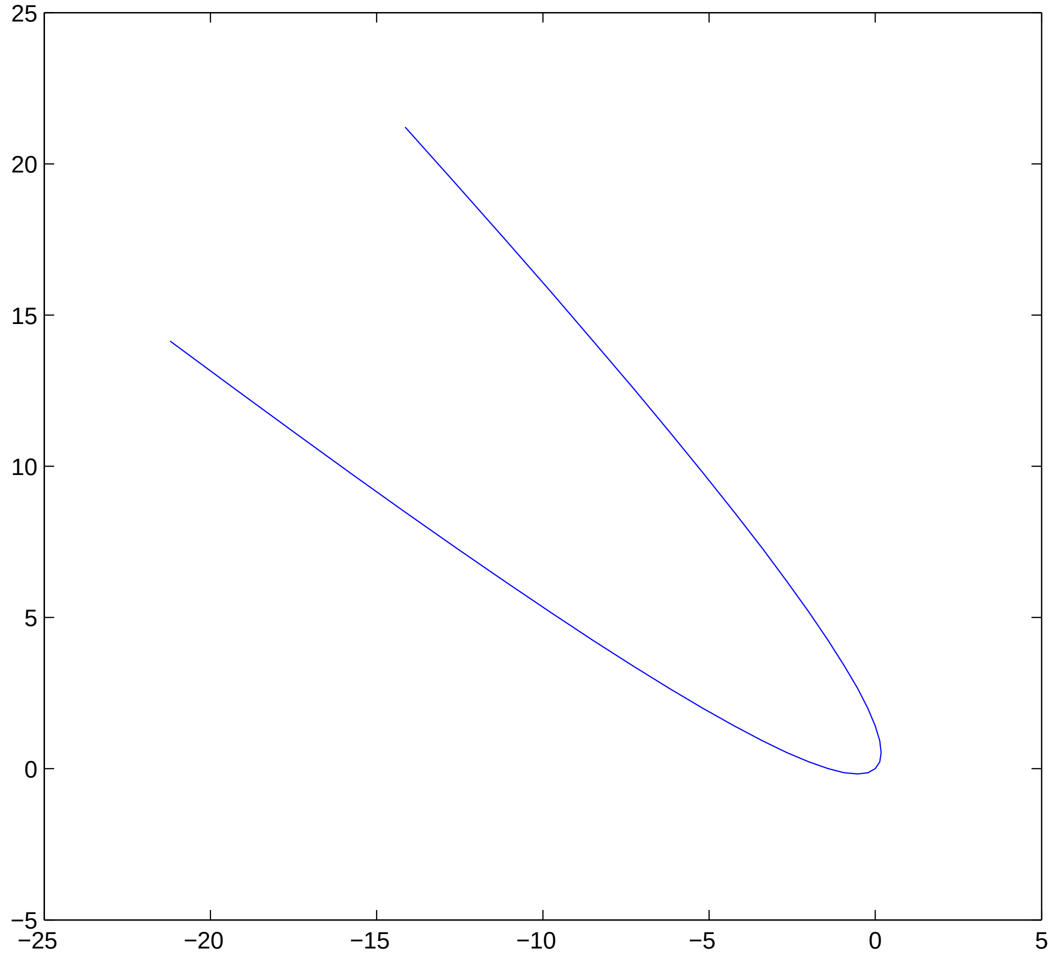
Koristilo bi, če mešani člen ne bi bil prisoten. Zato si izberimo tak kot ϕ, da bo koeficient pri mešanem členu ničelen. Rešiti moramo torej trigonometrično enačbo

$$\cos^2\phi - \sin^2\phi = 0$$

Hitro uganemo eno rešitev (ostale nas ne zanimajo, potrebujemo le enega izmed možnih zasukov koordinatnega sistema): $\phi = \pi/4$. Dobljeni zasuk vstavimo v enačbo parabole in dobimo precej pohlevno enačbo.

$$Y = X^2$$

Dobljene parabole ni težko narisati.



25
20
15
10
5
0
−5
−25
−20
−15
−10
−5
0
5

3. Dana je krivulja $r = 2\cos\varphi$.

   - Zapiši enačbo krivulje v kartezičnih koordinatah in jo nariši.
   - Za katere φ je krivulja vzporedna s koordinatno osjo y.
   - Izračunaj ploščino krivočrtnega trikotnika, ki ga omejujejo krivulja in poltraka $\varphi = 0$ ter $\varphi = \pi/4$.

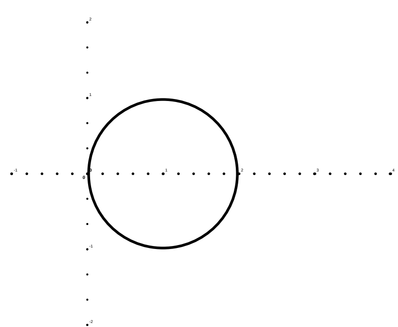
Rešitev: Najprej poglejmo definicijsko območje. Nespodobno bi bilo tolerirati negativen radij, zato argument φ omejimo na interval $[-\pi/2, \pi/2]$. Seveda smo opazili, da je krivulja periodična s periodo 2π. Kartezične koordinate dobimo iz polarnih z znano formulo:

$$x(t) = r(t)\cos t, \qquad y(t) = r(t)\sin t\ .$$

Krivulja se v kartezičnih koordinatah torej glasi

$$x(\varphi) = 2\cos^2\varphi, \qquad y(\varphi) = \sin 2\varphi\ .$$

Narišimo še skico. Da res pride krožnica, se lahko prepričamo tudi z računom $(2\cos^2\varphi - 1)^2 + (\sin 2\varphi)^2 = 1$.



Krivulja je vzporedna z y osjo v točkah, kjer se x koordinata lokalno ne spreminja, torej $x'(\varphi) = 0$.

$$x'(\varphi) = -2\sin 2\varphi = 0$$

$$2\varphi_k = 0 + k\pi, \qquad k = -1, 0, 1, 2$$

$$\varphi_k = \frac{k\pi}{2}, \qquad k = -1, 0, 1$$

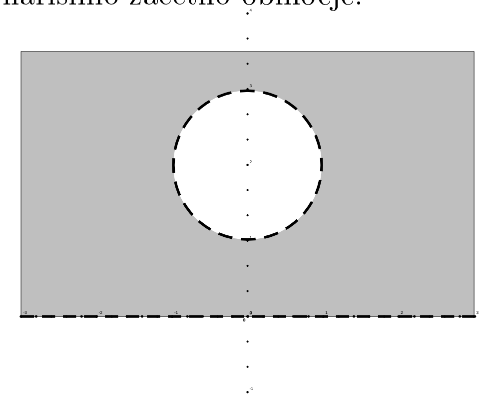
Rešitev $\varphi = \pi$ smo izpustili, ker ne leži v definicijskem območju.

Ploščino najlažje izračunamo iz polarnega zapisa.

$$S = \int_0^{\pi/4} r(t)^2 \,\mathrm{dt} = \int_0^{\pi/4} 4\cos^2 t \,\mathrm{dt} = 4\int_0^{\pi/4} \frac{1+\cos t}{2} \,\mathrm{dt} = \pi/2 + \sqrt{2}$$

4. Kam se s preslikavo
$$z \mapsto \frac{1}{z-i}$$
preslika območje $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} \ : \ \mathrm{Im} z > 0 \text{ in } |z-2i| > 1\}$?

Rešitev: Najprej narišimo začetno območje.



Mejo začetnega območja sestavljata krožnica in premica. Najlažja pot je ugotoviti, kam se s preslikavo preslikata meji. Ker imamo opravka z lomljeno linearno transformacijo, se krožnice preslikajo bodisi v krožnice bodisi v premice in podobno tudi premice. Krožnico v ravnini natanko določajo tri točke. Zato na vsaki meji območja izberimo po tri točke in poglejmo, kam se preslikajo.

Na krožnici naprimer izberemo točke i, $1+2i$ in $3i$. Njihove slike so (po vrsti) ∞, $(1-i)/2$ in $-i/2$. Slike ležijo na premici, ki jo določata zadnji dve točki.

Na premici pa lahko izberemo točke -1, 0 in 1, ki se po vrsti preslikajo v $(-1+i)/2$, i in $(1+i)/2$. Slike torej ležijo na krožnici s središčem v $i/2$ in polmerom $1/2$.

Nedvomno se območje med mejama preslika na območje med mejama. Skica preslikanega območja torej izgleda nekako takole.