

Prvi kolokvij iz Analize 2

11. 4. 2007

Ime in Priimek:

Vpisna številka:

1. Krivulja H je dana v parametrični obliki s predpisom

$$x(t) = a \sin t, \quad y(t) = a \sin t \cos t,$$

kjer je $a > 0$.

- Krivuljo čimbolj natančno nariši.
- Določi enačbo tangente na krivuljo pri $t = \pi$.
- Izračunaj ploščino območja v ravnini, ki ga omejuje krivulja.

2. Naj bo E krivulja, ki je dana implicitno z enačbo

$$5(x^2 + y^2) = 2 - 6xy.$$

- Poišči vsa presečišča krivulje E s krivuljo $5(x^2 + y^2) = 2 + 6xy$.
- Določi točke na krivulji E , kjer je tangenta nanjo vzporedna osi x .

3. Naj bosta $g(z) = z^2$ in $f(z) = \frac{z+1}{1-z}$ preslikavi kompleksne ravnine ter $D = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0 \text{ in } \operatorname{Im}(z) > 0 \text{ in } |z| > 1\}$ območje v kompleksni ravnini.

- Skiciraj območje D .
- Naj bo D' slika območja D s preslikavo $f \circ g$, torej $D' = f(g(D))$. Skiciraj območje D' .

4. Poišči tretje korene enice (torej reši enačbo $z^3 = 1$ v kompleksnih številih). Naj bodo ζ_1, ζ_2 in ζ_3 tretji koreni, ki si jih izračunal. Poišči preslikavo kompleksne ravnine f , ki preslika $\zeta_k \mapsto k$ ($k = 1, 2, 3$).

Namig:

Preslikavo f je verjetno najbolje zapisati s kompozitumom $f = \psi^{-1} \circ \varphi$, kjer preslikava φ slika

$$\zeta_1 \mapsto 0, \quad \zeta_2 \mapsto \infty \quad \text{in} \quad \zeta_3 \mapsto 1,$$

preslikava ψ pa slika

$$1 \mapsto 0, \quad 2 \mapsto \infty \quad \text{in} \quad 3 \mapsto 1.$$

BONUS (10 točk):

Zapiši splošno formulo za periodično zaporedje $1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, \dots$