Analiza 2
Rešitve 12. sklopa nalog

Navadne diferencialne enačbe prvega reda

(1) Dani družini krivulj najprej skiciraj, nato pa še izračunaj pripadajoči diferencialni enačbi ter družini ortogonalnih trajektorij:

(a) $y = Cx^2$,

(b) $x^2 + y^2 = 2Cx$.

Rešitev: Navadne diferencialne enačbe prvega reda so v tesni povezavi z enoparametričnimi družinami krivulj. V grobem imamo namreč korespondenco

$$\{\text{enoparametrične družine krivulj v ravnini}\} \leftrightarrow \{\text{navadne diferencialne enačbe 1. reda}\}.$$

Na relativno enostaven način lahko dani družini krivulj priredimo diferencialno enačbo z odvajanjem, medtem ko v obratno smer pridemo z reševanjem diferencialne enačbe, ki pa je v splošnem lahko precej zahtevno.

(a) Z odvajanjem enačbe $y = Cx^2$ pridemo do zveze

$$y' = 2Cx.$$

Če sedaj upoštevamo, da je $C = \frac{y}{x^2}$, dobimo diferencialno enačbo za družino parabol $y = Cx^2$ v ravnini:

$$y' = \frac{2y}{x}.$$

Družina *ortogonalnih trajektorij* dane družine je družina krivulj, ki sekajo vse krivulje iz dane družine pod pravim kotom. Najlažje družino ortogonalnih trajektorij opišemo z diferencialno enačbo, ki jo dobimo, tako da v diferencialni enačbi, ki pripada dani družini, y' zamenjamo z $-\frac{1}{y'}$.

V primeru družine parabol tako pridemo do diferencialne enačbe,

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x}.$$

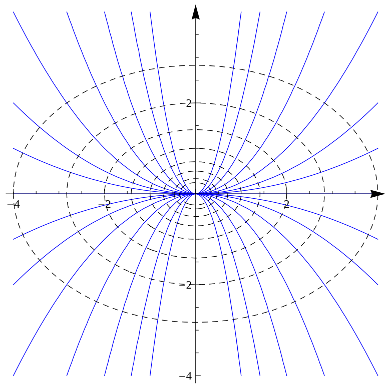
Dano diferencialno enačbo najprej preoblikujemo v:

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{x},$$
$$2yy' + x = 0,$$

od koder z integriranjem pridemo do enačbe $y^2 + \frac{x^2}{2} = C^2$ oziroma

$$\frac{y^2}{C^2} + \frac{x^2}{2C^2} = 1,$$

ki predstavlja družino elips v ravnini. Poglejmo še skico.



(b) Enačba $x^2 + y^2 = 2Cx$ predstavlja družino krožnic s središči na abscisni osi, ki se dotikajo ordinatne osi. Z odvajanjem pridemo do diferencialne enačbe za to družino:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 2Cx, \\ 2x + 2yy' &= 2C, \\ 2x + 2yy' &= \frac{x^2 + y^2}{x}, \\ y' &= \frac{y^2 - x^2}{2xy}. \end{aligned}$$

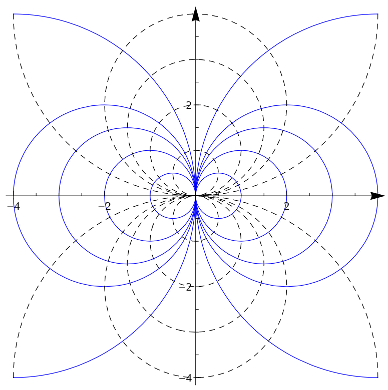
Diferencialna enačba za družino ortogonalnih trajektorij pa je:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{y'} &= \frac{y^2 - x^2}{2xy}, \\ \frac{1}{y'} &= \frac{x^2 - y^2}{2xy}. \end{aligned}$$

Te diferencialne enačbe zaenkrat še ne znamo rešiti, če pa upoštevamo, da je $y' = \frac{dy}{dx}$, vidimo, da sta diferencialni enačbi za družino krožnic in pa za družino ortogonalnih trajektorij analogni, z zamenjanima vlogama x in y. Preverimo lahko, da družino ortogonalnih trajektorij predstavljajo krožnice

$$x^2 + y^2 = 2Cy$$

s središči na ordinatni osi, ki se dotikajo abscisne osi.



□

(2) Reši diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami:

(a) $y' = -ky^2$,

(b) $xyy' = 1 - x^2$,

(c) $y' = k(M - y)$, pri začetnem pogoju $y(0) = 0$.

Rešitev: Navadna diferencialna enačba prvega reda je enačba oblike

$$y' = F(x, y),$$

kjer je F neka zvezna funkcija dveh spremenljivk. Rešitev enačbe je vsaka odvedljiva funkcija $y : I \to \mathbb{R}$ (kjer je I nek interval), ki zadošča enačbi. V splošnem je množica rešitev enačbe enoparametrična družina krivulj, natanko določeno rešitev pa dobimo, če predpišemo vrednost rešitve v neki točki. V tem primeru lahko govorimo o maksimalni rešitvi, to je rešitvi, ki je definirana na maksimalnem intervalu, ki vsebuje dano točko.

Diferencialna enačba ima *ločljive spremenljivke*, če je oblike

$$y' = f(x)g(y)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Diferencialne enačbe z ločljivimi spremenljivkami rešujemo, tako da najprej zapišemo $y' = \frac{dy}{dx}$, ločimo spremenljivki vsako na svojo stran, in nato integriramo vsako stran posebej.

(a) $y' = -ky^2$:

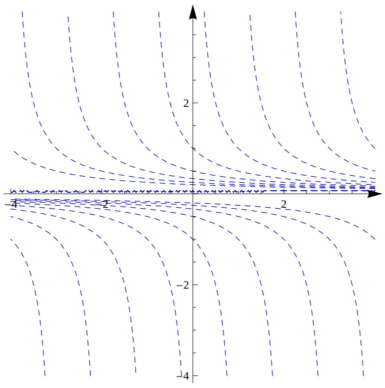
Računajmo:

$$\begin{aligned} y' &= -ky^2, \\ \frac{dy}{dx} &= -ky^2, \\ \frac{dy}{y^2} &= -k\,dx, \\ -\frac{1}{y} &= -kx + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo splošno rešitev enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{kx - C}}}.$$

Za vsako izbiro konstante C dobimo natanko določeno rešitev enačbe. Že na tem zelo preprostem zgledu vidimo, da imajo rešitve enačbe pole in torej niso definirane na celotni realni osi. Pri računanju smo potiho predpostavili, da je $y \neq 0$. Hitro pa se lahko prepričamo, da je rešitev enačbe tudi funkcija $y(x) = 0$.



(b) $xyy' = 1 - x^2$:

V tem primeru imamo:

$$\begin{aligned} xyy' &= 1 - x^2, \\ yy' &= \frac{1 - x^2}{x}, \\ y\,dy &= \left(\frac{1}{x} - x\right)\,dx, \\ \frac{1}{2}y^2 &= \ln|x| - \frac{x^2}{2} + C. \end{aligned}$$

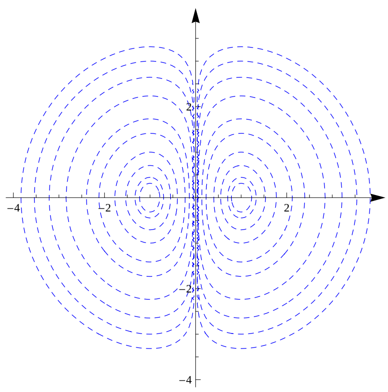
Splošna rešitev enačbe je torej

$$y(x) = \underline{\underline{\pm\sqrt{2\ln|x| - x^2 + 2C}}}.$$

Diferencialna enačba $xyy' = 1 - x^2$ ni v standardni obliki, saj y' ni eksplicitno izražen. Če izrazimo

$$y' = \frac{1 - x^2}{xy}$$

bo enačba dobro definirana le na točkah izven koordinatnih osi. Družina rešitev sestoji iz štirih poddružin, vsake v svojem kvadrantu. Opazimo lahko simetrijo rešitev glede na zrcaljenje preko abscisne in pa ordinatne osi. Dobro je tudi razvidno, da rešitve 'obkrožajo' točki $(1, 0)$ in $(-1, 0)$.



(c) $y' = k(M - y)$:

Poglejmo si še, kako lahko z upoštevanjem začetnega pogoja dobimo natanko določeno rešitev. Najprej poiščimo splošno rešitev diferencialne enačbe:

$$\begin{aligned} y' &= k(M-y), \\ \frac{dy}{M-y} &= k\,dx, \\ -\ln|M-y| &= kx + C, \\ |M-y| &= e^{-kx-C}, \\ M - y &= \pm e^{-kx-C}. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$y(x) = M \pm e^{-kx-C}.$$

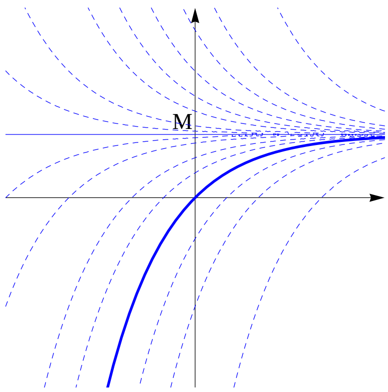
Spet imamo rešitev $y(x) = M$, ki ni zajeta v zgornji formuli. Upoštevajmo sedaj, da mora veljati $y(0) = 0$. Potem je

$$0 = M \pm e^{-C}.$$

Od tod sledi, da moramo izbrati minus v zgornji rešitvi in da velja $M = e^{-C}$. Rešitev enačbe pri danemu začetnemu pogoju je

$$y(x) = \underline{\underline{M(1 - e^{-kx})}}.$$

Ta rešitev je definirana na celi realni osi. Poglejmo skico rešitev enačbe in pa rešitve pri začetnemu pogoju $y(0) = 0$.



$\square$

(3) Reši linearne diferencialne enačbe:

(a) $y' - y = e^{-x}$,

(b) $y' + \dfrac{y}{x^2} = 2xe^{\frac{1}{x}}$,

(c) $x^2y' + 3xy = \dfrac{1}{x}$.

Rešitev: Linearna diferencialna enačba 1. reda je diferencialna enačba oblike

$$y' + f(x)y = g(x)$$

za neki zvezni funkciji f in g. Če je $g = 0$, je enačba *homogena*, sicer pa je *nehomogena*. Linearne diferencialne enačbe 1. reda rešujemo v dveh korakih. Najprej poiščemo rešitev homogene enačbe, nato pa še partikularno rešitev. Splošna rešitev je potem vsota teh dveh rešitev

$$y = y_h + y_p.$$

Partikularno rešitev lahko včasih uganemo, sicer pa jo poiščemo z nastavkom ali pa z metodo variacije konstante.

(a) $y' - y = e^{-x}$:

Homogeni del:

Rešujemo enačbo z ločljivimi spremenljivkami $y' - y = 0$:

$$\begin{aligned} y' - y &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= y, \\ \frac{dy}{y} &= dx, \\ \ln|y| &= x + D, \\ |y| &= e^D e^x. \end{aligned}$$

Vrednost konstante e^D je zaenkrat pozitivna. Če pa odpravimo absolutno vrednost, lahko splošno rešitev homogene enačbe zapišemo v obliki

$$y_h = Ce^x,$$

kjer je C sedaj poljubno realno število. Posebej lahko preverimo, da je možna tudi rešitev $y_h = 0$ pri $C = 0$.

Nehomogeni del:

Partikularno rešitev linearne diferencialne enačbe lahko poiščemo z metodo variacije konstante. Naj bo $y_h(x) = Cy_0(x)$ splošna rešitev homogene enačbe. Potem lahko partikularno enačbo poiščemo z nastavkom

$$y(x) = C(x)y_0(x),$$

ki ga vstavimo v enačbo, od koder z integriranjem dobimo $C(x)$. V našem primeru je $y'(x) = C'(x)e^x + C(x)e^x$. Če to vstavimo v enačbo, dobimo:

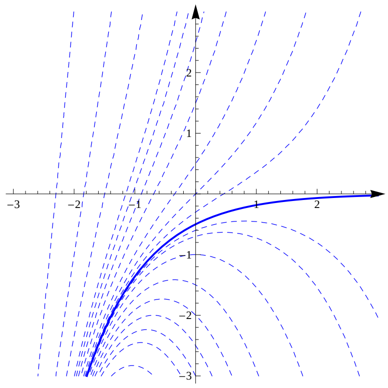
$$\begin{aligned} C'(x)e^x + C(x)e^x - C(x)e^x &= e^{-x}, \\ C'(x) &= e^{-2x}, \\ C(x) &= -\frac{1}{2}e^{-2x} + C. \end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat

$$y(x) = C(x)e^x = \left(-\frac{1}{2}e^{-2x} + C\right)e^x = \underline{\underline{-\frac{1}{2}e^{-x} + Ce^x}}.$$

Partikularna rešitev, ki smo jo dobili z metodo variacije konstante, je $y_p = -\frac{1}{2}e^{-x}$.

Poglejmo si družino rešitev še grafično. Z polno črto je označena partikularna rešitev enačbe (ki ustreza vrednosti $C = 0$). Krivulje nad njo ustrezajo vrednostim $C > 0$, krivulje pod njo pa vrednostim $C < 0$.



(b) $y' + \dfrac{y}{x^2} = 2xe^{\frac{1}{x}}$:

Homogeni del:

Rešimo najprej homogeno enačbo:

$$\begin{aligned}
y' + \frac{y}{x^2} &= 0,\\
\frac{dy}{dx} &= -\frac{y}{x^2},\\
\frac{dy}{y} &= -\frac{dx}{x^2},\\
\ln|y| &= \frac{1}{x} + D,\\
|y| &= e^D e^{\frac{1}{x}}.
\end{aligned}$$

Splošna rešitev homogene enačbe je torej

$$y_h = Ce^{\frac{1}{x}}.$$

Nehomogeni del:

Partikularno rešitev bomo poiskali z metodo variacije konstante. Imamo

$$y'(x) = C'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}}.$$

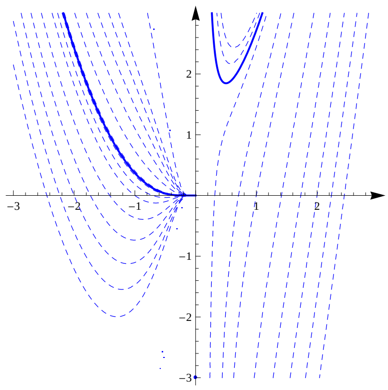
Če to vstavimo v enačbo, dobimo:

$$\begin{aligned}
C'(x)e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^2}C(x)e^{\frac{1}{x}} &= 2xe^{\frac{1}{x}},\\
C'(x) &= 2x,\\
C(x) &= x^2 + C.
\end{aligned}$$

Od tod dobimo rezultat

$$y(x) = C(x)e^{\frac{1}{x}} = \left(x^2 + C\right) e^{\frac{1}{x}} = \underline{\underline{x^2 e^{\frac{1}{x}} + Ce^{\frac{1}{x}}}}.$$

Rešitve enačbe so definirane na $(-\infty, 0)$ ali pa na $(0, \infty)$. Krivulje z leve limitirajo proti točki $(0, 0)$ v vodoravni smeri. Na desni strani gredo pri $x \to 0$ krivulje s $C \geq 0$ proti ∞, krivulje s $C < 0$ pa proti $-\infty$. Krivulje s $C > 0$ ležijo nad rešitvama pri $C = 0$, krivulje s $C < 0$ pa pod njima.



(c) $x^2 y' + 3xy = \dfrac{1}{x}$:

Homogeni del:

Računajmo:

$$\begin{aligned} x^2 y' + 3xy &= 0, \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3y}{x}, \\ \frac{dy}{y} &= -3\frac{dx}{x}, \\ \ln|y| &= -3\ln|x| + D, \\ |y| &= e^D |x|^{-3}. \end{aligned}$$

Od tod dobimo splošno rešitev homogene enačbe

$$y_h = \frac{C}{x^3}.$$

Nehomogeni del:

Sedaj imamo

$$y'(x) = C'(x)\frac{1}{x^3} - 3C(x)\frac{1}{x^4},$$

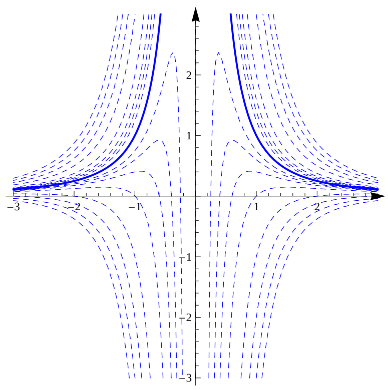
od koder dobimo dobimo:

$$\begin{aligned} x^2\left(C'(x)\frac{1}{x^3} - 3C(x)\frac{1}{x^4}\right) + 3x\frac{C(x)}{x^3} &= \frac{1}{x}, \\ C'(x) &= 1, \\ C(x) &= x + C. \end{aligned}$$

Splošna rešitev enačbe je torej

$$y(x) = \frac{C(x)}{x^3} = \frac{x + C}{x^3} = \underline{\underline{\frac{1}{x^2} + \frac{C}{x^3}}}.$$

Rešitve enačbe so tudi tokrat definirane na $(-\infty, 0)$ ali pa na $(0, \infty)$.



□

(4) Reši Bernoullijevi diferencialni enačbi:

(a) $y' - y = e^x y^2$,

(b) $2xy' - y = \dfrac{x^2}{y}$, pri začetnem pogoju $y(1) = -2$.

Rešitev: Diferencialna enačba 1. reda je *Bernoullijeva*, če jo lahko zapišemo v obliki

$$y' + f(x)y = g(x)y^\alpha$$

za neki zvezni funkciji f in g in $\alpha \in \mathbb{R}$. V primeru $\alpha \in \{0, 1\}$ je to linearna DE, v splošnem pa jo s substitucijo $z = y^{1-\alpha}$ prevedemo na linearno enačbo.

(a) $y' - y = e^x y^2$:

V tem primeru je $\alpha = 2$, zato bomo uporabili substitucijo $z = \frac{1}{y}$. Z odvajanjem dobimo

$$z' = -\frac{y'}{y^2}$$

s čimer prvotno enačbo prevedemo na linearno enačbo za spremenljivko z:

$$\begin{aligned} y' - y &= e^x y^2, \\ \frac{y'}{y^2} - \frac{1}{y} &= e^x, \\ -z' - z &= e^x. \end{aligned}$$

Rešitev homogene enačbe je $z_h = Ce^{-x}$, z nastavkom $z(x) = C(x)e^{-x}$ pa dobimo:

$$\begin{aligned} -\left(C'(x)e^{-x} - C(x)e^{-x}\right) - C(x)e^{-x} &= e^x, \\ C'(x) &= -e^{2x}, \\ C(x) &= -\frac{1}{2}e^{2x} + C. \end{aligned}$$

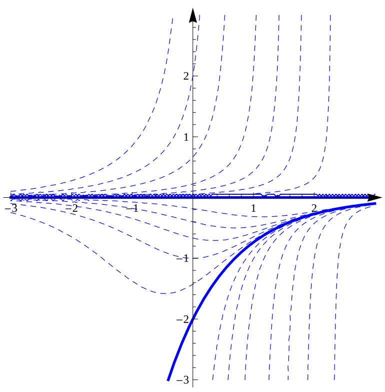
Sledi

$$z(x) = \left(-\frac{1}{2}e^{2x} + C\right)e^{-x} = -\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}$$

in

$$y(x) = \underline{\underline{\frac{1}{-\frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}}}}.$$

Poleg izračunanih rešitev enačbo reši tudi funkcija $y = 0$. Rešitev, ki ustreza konstanti $C = 0$ in pa graf funkcije $y = 0$ sta prikazana s polno črto. Rešitve, pri katerih je $C < 0$, se nahajajo med omenjenima rešitvama in so definirane na celi realni osi, medtem ko imajo rešitve pri $C > 0$ pole.



(b) $2xy' - y = \dfrac{x^2}{y}$:

Sedaj je $\alpha = -1$, zato definirajmo $z = y^2$. Z odvajanjem dobimo $z' = 2yy'$ in

$$\begin{aligned} 2xyy' - y^2 &= x^2, \\ xz' - z &= x^2. \end{aligned}$$

Rešitev homogene enačbe je $z_h = Cx$, z nastavkom $z(x) = C(x)x$ pa dobimo:

$$\begin{aligned} x\left(C'(x)x + C(x)\right) - C(x)x &= x^2, \\ C'(x) &= 1, \\ C(x) &= x + C. \end{aligned}$$

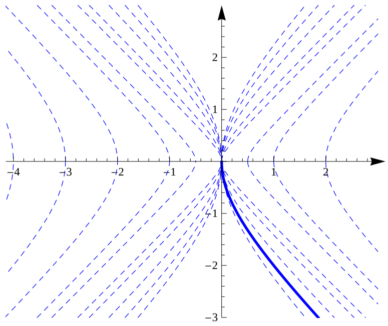
Od tod sledi $z(x) = x^2 + Cx$ in

$$y(x) = \pm\sqrt{x^2 + Cx}.$$

Z upoštevanjem začetnega pogoja $-2 = y(1) = \pm\sqrt{1+C}$ vidimo, da moramo izbrati negativen predznak in da je $C = 3$. Rešitev enačbe, ki ustreza $y(1) = -2$, je torej

$$y(x) = \underline{\underline{-\sqrt{x^2+3x}}},$$

definirana pa je na intervalu $(0, \infty)$.



$\square$

(5) Reši homogeno diferencialno enačbo

$$y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}.$$

Rešitev: Diferencialna enačba 1. reda je *homogena*, če je oblike

$$y' = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

za neko zvezno funkcijo g. Rešujemo jo z uvedbo nove spremenljivke $u = \frac{y}{x}$. Z odvajanjem enačbe $ux = y$ potem dobimo $u'x + u = y'$.

Računajmo:

$$\begin{aligned}
y' &= \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \\
y' &= \frac{2\frac{y}{x}}{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}, \\
u'x + u &= \frac{2u}{1-u^2}, \\
xu' &= \frac{2u - u + u^3}{1-u^2}, \\
xu' &= \frac{u(1+u^2)}{1-u^2}, \\
\frac{(1-u^2)\,du}{u(1+u^2)} &= \frac{dx}{x}.
\end{aligned}$$

Racionalno funkcijo na levi strani lahko integriramo s pomočjo razcepa na parcialne ulomke:

$$\int \frac{(1-u^2)\,du}{u(1+u^2)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{2u}{1+u^2}\right) du = \ln|u| - \ln(1+u^2).$$

Od tod dobimo:

$$\begin{aligned}
\ln|u| - \ln(1+u^2) &= \ln|x| + E,\\
\frac{|u|}{1+u^2} &= e^E|x|,\\
\frac{u}{1+u^2} &= Cx.
\end{aligned}$$

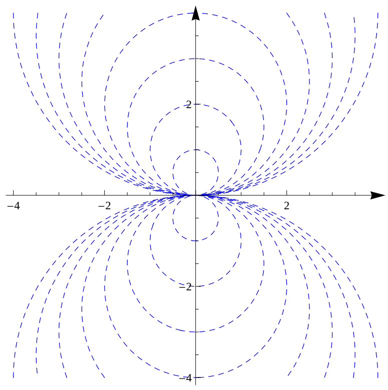
Sedaj upoštevajmo, da je $u = \frac{y}{x}$, da dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{\frac{y}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} &= Cx,\\
\frac{xy}{x^2+y^2} &= Cx.
\end{aligned}$$

Če pišemo $D = \frac{1}{C}$, vidimo, da so rešitve enačbe krožnice

$$x^2 + y^2 = Dy,$$

s središči na ordinatni osi, ki se dotikajo abscisne osi.



$\square$