Analiza 2
Rešitve 14. sklopa nalog

Navadne diferencialne enačbe višjih redov in sistemi diferencialnih enačb

(1) Reši homogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti:

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$,
(b) $y'' - 2y' + y = 0$,
(c) $y'' + y = 0$,
(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$.

Rešitev: Homogene diferencialne enačbe drugega reda s konstantnimi koeficienti so enačbe oblike

$$y'' + ay' + by = 0.$$

Z nastavkom $y = e^{\lambda x}$ pridemo do karakteristične enačbe

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0.$$

Rešitvi $\lambda_{1,2}$ karakteristične enačbe imenujemo karakteristični števili. Splošna rešitev enačbe je odvisna od karakterističnih števil. Zapišemo jo lahko v obliki:

- $y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, če sta $\lambda_1 \neq \lambda_2$ realni števili.
- $y(x) = (C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$, če je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \mathbb{R}$.
- $y(x) = C_1 e^{\lambda x} \cos \omega x + C_2 e^{\lambda x} \sin \omega x$, če je $\lambda_1 = \lambda + i\omega$ in $\lambda_2 = \lambda - i\omega$.

(a) $y'' - 6y' + 8y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 4$. Torej je splošna rešitev diferencialne enačbe

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x}}}.$$

(b) $y'' - 2y' + y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$ ima rešitev $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Splošna rešitev je

$$y(x) = \underline{\underline{(C_1 + C_2 x) e^{x}}}.$$

(c) $y'' + y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima imaginarni rešitvi $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$. Splošna rešitev se zato glasi

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 \cos x + C_2 \sin x}}.$$

(d) $y'' + 2y' + 2y = 0$:

Karakteristična enačba $\lambda^2+2\lambda+2=0$ ima kompleksni rešitvi $\lambda_1 = -1+i$ in $\lambda_2 = -1-i$. Splošna rešitev pa je

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{-x}\cos x + C_2 e^{-x}\sin x}}.$$

□

(2) Z metodo nedoločenih koeficientov reši nehomogene diferencialne enačbe:

(a) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4$,
(b) $y'' - 7y' + 10y = 4e^x + 20$,
(c) $y'' + 4y' - 5y = 26\sin x$,
(d) $y'' + y = 2\cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Rešitev: Nehomogeno diferencialno enačbo drugega reda s konstantnimi koeficienti lahko zapišemo v obliki

$$y'' + ay' + by = r(x),$$

kjer je nehomogeni člen $r(x)$ ponavadi vsota členov, ki so oblike $p(x)e^{\lambda x}\cos\omega x$ ali pa $p(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$. Splošna rešitev enačbe je oblike

$$y = y_h + y_p,$$

kjer je y_h rešitev homogene enačbe, partikularno rešitev y_p pa lahko poiščemo z metodo nedoločenih koeficientov z naslednjim nastavkom:

Nehomogeni člen	Število	Nastavek
$p_n(x)e^{\lambda x}$	λ	$P_n(x)e^{\lambda x}$
$p_n(x)\cos\omega x$, $p_n(x)\sin\omega x$	$\pm i\omega$	$P_n(x)\cos\omega x + Q_n(x)\sin\omega x$
$p_n(x)e^{\lambda x}\cos\omega x$, $p_n(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$	$\lambda \pm i\omega$	$P_n(x)e^{\lambda x}\cos\omega x + Q_n(x)e^{\lambda x}\sin\omega x$

Pri tem sta P_n in Q_n poljubna polinoma iste stopnje kot polinom p_n. Če je število, ki pripada nehomogenemu členu, ničla karakteristične enačbe stopnje s, moramo nastavek pomnožiti z x^s. Če je nehomogeni člen vsota večih členov, izračunamo partikularno rešitev za vsak člen posebej in nato te rešitve seštejemo.

(a) $y'' - 4y' + 3y = 3x - 4$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = 3$. Dobimo

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je linearna funkcija, zato vzemimo za nastavek poljubno linearno funkcijo $y_p(x) = Ax + B$. Od tod sledi:

$$y_p'(x) = A,$$
$$y_p''(x) = 0.$$

Če to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$-4A + 3(Ax + B) = 3x - 4,$$

kar prepišemo v sistem enačb:

$$3A = 3,$$
$$3B - 4A = -4.$$

Rešitev tega sistema je $A = 1$ in $B = 0$. Sledi $y_p(x) = x$ in

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{3x} + x}}.$$

(b) $y'' - 7y' + 10y = 4e^x + 20$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 - 7\lambda + 10 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = 5$, kar nam da

$$y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x}.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni del je tukaj vsota eksponentne funkcije in pa konstante. Zato bomo vzeli nastavek $y_p(x) = Ae^x + B$. Dobimo $y_p'(x) = Ae^x$ in $y_p''(x) = Ae^x$. Če to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo

$$Ae^x - 7Ae^x + 10(Ae^x + B) = 4e^x + 20,$$

kar prepišemo v sistem enačb:

$$4A = 4,$$
$$10B = 20,$$

ki ima rešitev $A = 1$, $B = 2$. Sledi $y_p(x) = e^x + 2$ in

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^{2x} + C_2 e^{5x} + e^x + 2}}.$$

(c) $y'' + 4y' - 5y = 26\sin x$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = 1$ in $\lambda_2 = -5$, zato je

$$y_h(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-5x}.$$

Nehomogeni del:

Na desni strani imamo sinusno funkcijo, zato bomo vzeli nastavek $y_p(x) = A\sin x + B\cos x$.

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A\cos x - B\sin x, \\ y_p''(x) &= -A\sin x - B\cos x. \end{aligned}$$

Ko to vstavimo v diferencialno enačbo, dobimo enačbo:

$$\begin{aligned} -A\sin x - B\cos x + 4A\cos x - 4B\sin x - 5A\sin x - 5B\cos x &= 26\sin x, \\ (-6A - 4B)\sin x + (4A - 6B)\cos x &= 26\sin x. \end{aligned}$$

S primerjavo koeficientov pri funkcijah sin in cos pridemo do sistema enačb:

$$\begin{aligned} -6A - 4B &= 26, \\ 4A - 6B &= 0, \end{aligned}$$

ki ima rešitev $A = -3$, $B = -2$. Torej je $y_p(x) = -3\sin x - 2\cos x$, splošna rešitev pa je

$$y(x) = \underline{\underline{C_1 e^x + C_2 e^{-5x} - 3\sin x - 2\cos x}}.$$

(d) $y'' + y = 2\cos x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$:

Homogeni del:

Karakteristična enačba $\lambda^2 + 1 = 0$ ima rešitvi $\lambda_1 = i$ in $\lambda_2 = -i$. Sledi

$$y_h(x) = C_1\cos x + C_2\sin x.$$

Nehomogeni del:

Nehomogeni člen je kosinusna funkcija, zato je primeren nastavek $y_p(x) = A\cos x + B\sin x$. Ker pa je i hkrati enojna rešitev karakteristične enačbe, moramo ta nastavek pomnožiti z x, da dobimo

$$y_p(x) = x(A\cos x + B\sin x).$$

Odvoda partikularne rešitve sta enaka:

$$\begin{aligned} y_p'(x) &= A\cos x + B\sin x + x(-A\sin x + B\cos x), \\ y_p''(x) &= -2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x). \end{aligned}$$

Sedaj dobimo enačbo

$$-2A\sin x + 2B\cos x + x(-A\cos x - B\sin x) + x(A\cos x + B\sin x) = 2\cos x,$$

od koder sledi:

$$
\begin{aligned}
-2A &= 0,\\
2B &= 2.
\end{aligned}
$$

Partikularna rešitev je tako enaka

$$y_p(x) = x \sin x,$$

splošna rešitev enačbe pa je

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \sin x.$$

Konstanti C_1 in C_2 bomo določili z upoštevanjem začetnih pogojev. Iz enakosti

$$y'(x) = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + \sin x + x \cos x$$

sledi:

$$
\begin{aligned}
0 &= y(0) = C_1,\\
1 &= y'(0) = C_2.
\end{aligned}
$$

Rešitev enačbe pri danih začetnih pogojih je torej funkcija

$$y(x) = \underline{\underline{(x+1)\sin x}}.$$

$\square$

(3) Reši sistem navadnih diferencialnih enačb:

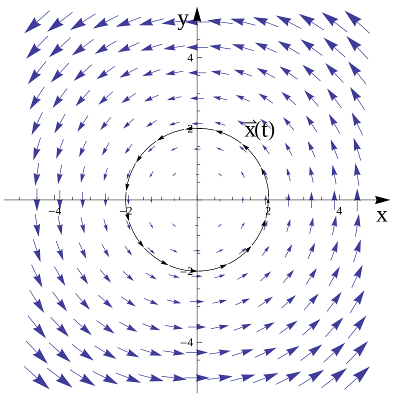
$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= -y,\\
\dot{y} &= x.
\end{aligned}
$$

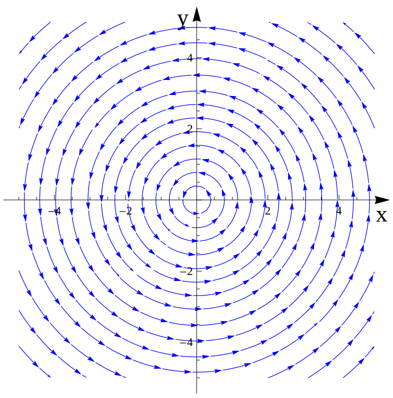
Rešitev: Homogen sistem navadnih diferencialnih enačb prvega reda s konstantnimi koeficienti je sistem oblike

$$\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x},$$

kjer je $\vec{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ in $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Rešitev sistema NDE je odvedljiva vektorska funkcija $\vec{x} : I^{\text{int}} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, za katero je $\dot{\vec{x}}(t) = A \cdot \vec{x}(t)$ za vsak $t \in I$. Grafično si lahko sistem predstavljamo kot vektorsko polje $\vec{x} \mapsto A \cdot \vec{x}$, rešitve sistema pa so krivulje, ki so tangentne na vektorsko polje.

V našem primeru ponazarja vektorsko polje vrtinec, ki kroži okrog izhodišča v pozitivni smeri. Pokazali bomo, da so rešitve sistema enačb parametrično podane krožnice s središči v koordinatnem izhodišču.





1. način: Sisteme NDE prvega reda v dveh dimenzijah lahko rešimo s prevedbo na eno enačbo drugega reda. Z odvajanjem prve enačbe dobimo $\ddot{x} = -\dot{y}$. Če upoštevamo, da je $\dot{y} = x$, pridemo do enačbe

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Splošna rešitev te enačbe je

$$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t.$$

Ker je $y = -\dot{x}$, od tod sledi še

$$y(t) = C_1 \sin t - C_2 \cos t.$$

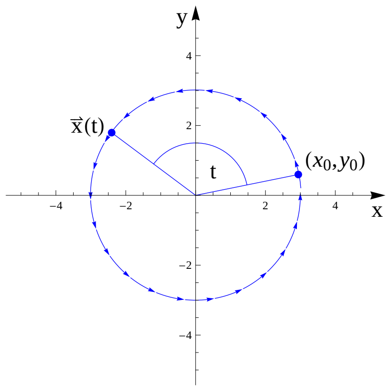
Če začetnih pogojev ne omenjamo eksplicitno, ponavadi privzamemo oznaki $x(0) = x_0$ in $y(0) = y_0$. V našem primeru tako dobimo $C_1 = x_0$ in $C_2 = -y_0$. Rešitev sistema lahko zapišemo v matrični obliki

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Matrika

$$R_t = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

predstavlja rotacijo za kot t v pozitivni smeri okoli izhodišča, kar pomeni, da točka, ki je na začetku v položaju (x_0, y_0), kroži okoli izhodišča, ob času t pa je zavrtena za kot t glede na začetni položaj.



2. način: Sisteme enačb v višjih dimenzijah običajno raje rešujemo z računanjem matričnih eksponentov. Rešitev sistema $\dot{\vec{x}} = A \cdot \vec{x}$ je namreč funkcija

$$\vec{x}(t) = e^{tA} \cdot \vec{x}(0),$$

kjer je matrični eksponent definiran s Taylorjevo vrsto

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!},$$

ki konvergira za vsako matriko A in vsak $t \in \mathbb{R}$. Včasih lahko to vrsto izračunamo direktno po definiciji, v splošnem pa si pomagamo s prevedbo matrike na Jordanovo kanonično formo. V našem primeru lahko eksplicitno izračunamo potence matrike A. Najprej je

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathrm{Id}.$$

Nadalje je $A^3 = -A$ in $A^4 = \mathrm{Id}$, kar pomeni, da je zaporedje (A^n) periodično s periodo 4. Sedaj je:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \mathrm{Id} + tA + \frac{t^2A^2}{2} + \frac{t^3A^3}{3!} + \frac{t^4A^4}{4!} + \cdots, \\ &= \mathrm{Id}\left(1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} - \frac{t^6}{6!} + \cdots\right) + A\left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \cdots\right). \end{aligned}$$

Izraza v oklepajih sta Taylorjevi vrsti funkcij cos in sin, kar pomeni, da je

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}.$$

Tako smo prišli po drugi poti do istega rezultata.

<u>Opomba:</u> Omenili smo že, da matrika

$$R_\phi = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix}$$

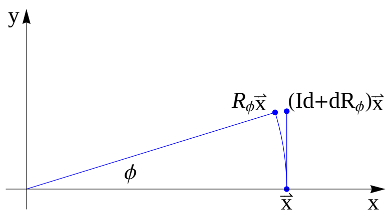
predstavlja rotacijo za kot ϕ v pozitivni smeri okoli izhodišča. Matriki

$$dR_\phi = \begin{bmatrix} 0 & -\phi \\ \phi & 0 \end{bmatrix}$$

rečemo infinitezimalna rotacija (čeprav v resnici ni rotacija), saj za majhne kote ϕ velja formula

$$R_\phi \approx \mathrm{Id} + dR_\phi.$$

Tu gre za analogijo aproksimacije grafa funkcije s tangento, le da tukaj aproksimiramo matrično funkcijo.



Kot smo že pokazali, je to le aproksimacija prvega reda natančne formule $R_\phi = e^{dR_\phi}$. □

(4) Reši sistema diferencialnih enačb z izračunom Jordanovih kanoničnih form:

(a) $\dot{x} = y$, $\dot{y} = 2x + y$,

(b) $\dot{x} = -x + y$, $\dot{y} = -4x + 3y$, $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

Rešitev: V praksi pogosto računamo eksponente matrik na naslednji način (ki je uporaben predvsem v višjih dimenzijah). Če je matrika diagonalna ali pa Jordanova kletka, je:

$$J_\lambda = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \implies e^{tJ_\lambda} = \begin{bmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \implies e^{tD} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix}.$$

V splošnem primeru lahko matriko prevedemo v Jordanovo kanonično formo $A = PJP^{-1}$, kjer je P prehodna matrika, J pa ali diagonalna matrika ali pa Jordanova kletka velikosti dva. Tedaj je $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$.

Matrika A ima lahko tudi dve konjugirano kompleksni lastni vrednosti. V tem primeru moramo računati v kompleksni aritmetiki.

(a) Rešujemo sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Najprej bomo prevedli matriko sistema A v Jordanovo kanonično formo $A = PJP^{-1}$. Lastne vrednosti matrike A so rešitve enačbe

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda) - 2 = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0.$$

Lastni vrednosti sta torej $\lambda_1 = 2$ in $\lambda_2 = -1$. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_1, mora zadoščati enačbi

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vzamemo lahko na primer $v_1 = (1, 2)$. Lastni vektor, ki pripada lastni vrednosti λ_2, pa zadošča enačbi

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vzemimo $v_2 = (1, -1)$. Tako dobimo prehodno matriko in njen inverz

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

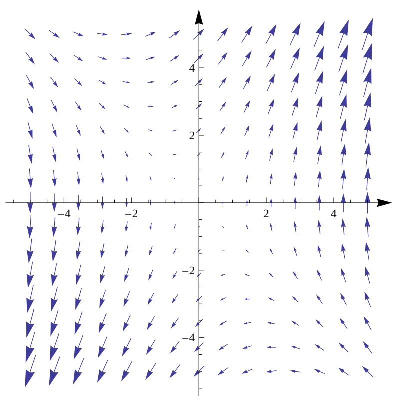
Od tod lahko izračunamo eksponent e^{tA}:

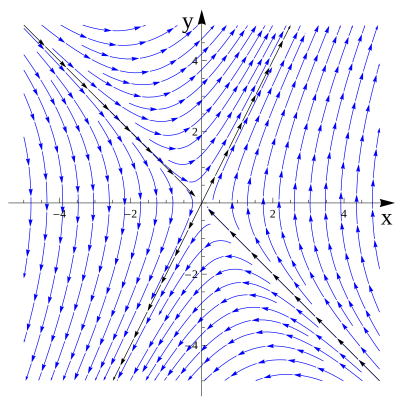
$$e^{tA} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & 2e^{2t} + e^{-t} \end{bmatrix}.$$

Rešitev danega sistema je

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} e^{2t} + 2e^{-t} & e^{2t} - e^{-t} \\ 2e^{2t} - 2e^{-t} & 2e^{2t} + e^{-t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}.$$

Poglejmo še skico vektorskega polja in rešitev sistema. V smereh lastnih vektorjev imamo tokovnice, ki gredo proti ali iz izhodišča (odvisno od predznaka lastne vrednosti).





(b) Sedaj imamo sistem diferencialnih enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Računajmo

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(3-\lambda) + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0.$$

Imamo eno dvojno lastno vrednost $\lambda = 1$, vendar pa je $\dim \ker(A - I) = 1$, kar pomeni, da imamo en lastni in en posplošeni lastni vektor. Za posplošeni lastni vektor lahko vzamemo $v_2 = (1, 0)$, od tod pa potem sledi $v_1 = (A - I)v_2 = (-2, -4)$. Prehodna matrika in njen inverz sta

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}.$$

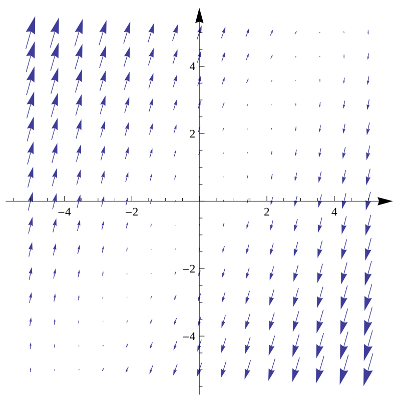
Eksponent e^{tA} je enak:

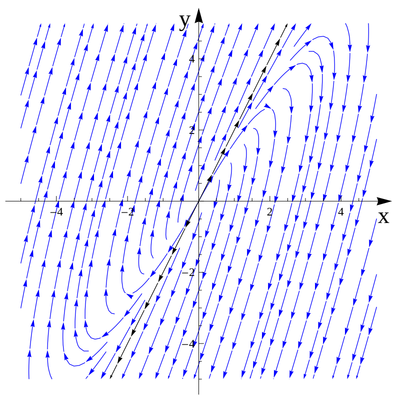
$$e^{tA} = \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} e^t & te^t \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = e^t \begin{bmatrix} 1-2t & t \\ -4t & 1+2t \end{bmatrix}.$$

Če upoštevamo začetna pogoja $x(0) = 0$ in $y(0) = 1$, dobimo rešitev

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^t \\ (1+2t)e^t \end{bmatrix}.$$

Poglejmo še skici.





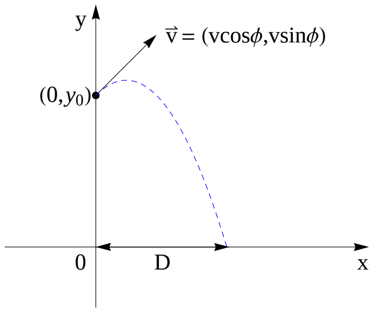
□

(5) Telo z maso m se premika pod vplivom sile teže. Na začetku je na višini y_0 in ima hitrost v v smeri, ki je pod kotom ϕ glede na vodoravnico.

(a) Izračunaj parabolo leta.

(b) Izračunaj domet telesa.

Rešitev: (a) Pri tej nalogi si bomo pogledali poševni met. Zaradi enostavnosti bomo privzeli, da se v začetnem trenutku masna točka nahaja na y-osi.



Masna točka se giblje pod vplivom sile teže $\vec{F} = (0, -mg)$, njen položaj ob času t pa bomo označili z $\vec{r}(t) = (x(t), y(t))$.

Gibanje točke po prostoru določa drugi Newtonov zakon

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}.$$

Matematično gledano je to sistem dveh navadnih diferencialnih enačb drugega reda, ki ga po komponentah lahko zapišemo v obliki:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= 0, \\ m\ddot{y} &= -mg. \end{aligned}$$

Rešitev takšnega sistema diferencialnih enačb je določena z začetnim položajem in pa z začetno hitrostjo točke:

$$\begin{aligned} \vec{r}(0) &= (0, y_0), \\ \dot{\vec{r}}(0) &= (v\cos\phi, v\sin\phi). \end{aligned}$$

V našem primeru so na srečo komponente sistema separirane, zato lahko vsako enačbo rešimo posebej. V bistvu nam niti ni potrebno znati reševati diferencialnih enačb, saj zadostuje že dvakratno integriranje.

<u>V smeri osi x</u>:

Z integriranjem enačbe $m\ddot{x} = 0$ (oziroma $\ddot{x} = 0$) dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= C, \\ x &= Ct + D. \end{aligned}$$

Z upoštevanjem začetnih pogojev $x(0) = 0$ in $\dot{x}(0) = v_x$ od tod sledi

$$x(t) = v\cos\phi\, t.$$

<u>V smeri osi y</u>:

V navpični smeri z integriranjem enačbe $m\ddot{y} = -mg$ (oziroma $\ddot{y} = -g$) dobimo:

$$\begin{aligned} \dot{y} &= -gt + C, \\ y &= -\frac{1}{2}gt^2 + Ct + D. \end{aligned}$$

Če upoštevamo, da je $y(0) = y_0$ in $\dot{y}(0) = v\sin\phi$, dobimo

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\phi\, t + y_0.$$

Trajektorija točke pri poševnem metu je torej

$$\vec{r}(t) = \left(v\cos\phi\, t, -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\phi\, t + y_0\right).$$

V tem zapisu za vsak čas natančno vemo, kje se točka nahaja. Če iz enakosti $x = v\cos\phi\, t$ izrazimo t in rezultat vstavimo v $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\phi\, t + y_0$, pa dobimo, da se točka giblje po paraboli

$$y = -\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x^2 + \operatorname{tg}\phi\, x + y_0.$$

(b) Sedaj nas bo zanimalo, kje točka pade na tla. Tam bo $y = 0$ oziroma

$$-\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}x^2 + \operatorname{tg}\phi\, x + y_0 = 0.$$

Ta kvadratna enačba ima dve rešitvi: eno pozitivno in eno negativno. Pozitivna rešitev je enaka dometu

$$D = \frac{\operatorname{tg}\phi + \sqrt{\operatorname{tg}^2\phi + \frac{4gy_0}{2v^2\cos^2\phi}}}{\frac{g}{2v^2\cos^2\phi}}.$$

Če mečemo s tal, je

$$D = \frac{2v^2}{g}\sin 2\phi,$$

od koder sledi, da bo domet maksimalen, če je začetni kot enak $\phi = 45°$. $\square$