Analiza 2
Rešitve 3. sklopa nalog

Določeni integral

(1) Izračunaj določena integrala s pomočjo prevedbe na Riemannovo vsoto:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x^2\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^1 2^x\,dx.$

Rešitev: Določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ zvezne, pozitivne funkcije f na intervalu $[a,b]$ lahko geometrično interpretiramo kot ploščino lika med grafom funkcije in abscisno osjo.

S pomočjo Riemannovih vsot lahko določeni integral $\int_a^b f(x)\,dx$ izračunamo takole:

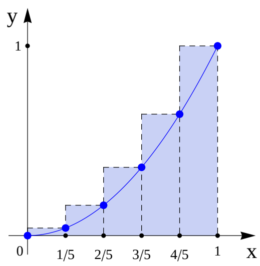
· Najprej razdelimo $[a,b]$ s točkami $x_i = a + i\cdot\dfrac{b-a}{n}$ za $0 \le i \le n$ na n enakih delov.

· $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\ldots$ približna vrednost.

· $\displaystyle\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)\ldots$ točna vrednost.

Lik aproksimiramo z unijami pravokotnikov, nato pa pogledamo limito aproksimacij, pri katerih so širine pravokotnikov čedalje manjše.

(a) Najprej bomo izračunali ploščino lika pod kvadratno parabolo na intervalu $[0,1]$.



Izračunajmo najprej približek za ploščino, ki ga dobimo, če interval $[0,1]$ razdelimo na n enakih delov. Ker je funkcija $f(x)=x^2$ na tem intervalu naraščajoča, bo ta približek večji od dejanske ploščine.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}f(x_i) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\left(\frac{i}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

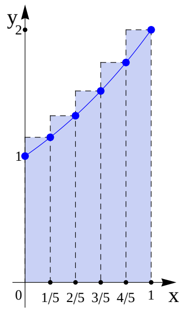
Pri izračunu smo uporabili formulo za vsoto kvadratov prvih n naravnih števil

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ki jo lahko dokažemo z indukcijo. Natančna vrednost ploščine lika je tako enaka

$$\int_0^1 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}.$$

(b) Izračunajmo sedaj še ploščino lika pod grafom eksponentne funkcije na intervalu $[0,1]$.



Približek za ploščino je enak:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} f(x_i) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} 2^{\frac{i}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\sqrt[n]{2})^i = \frac{\sqrt[n]{2}}{n}\left(1 + \sqrt[n]{2} + \cdots + (\sqrt[n]{2})^{n-1}\right),\\ &= \frac{\sqrt[n]{2}}{n}\cdot\frac{(\sqrt[n]{2})^n - 1}{\sqrt[n]{2} - 1} = \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1}.\end{aligned}$$

Tokrat smo uporabili formulo za izračun vsote geometrijskega zaporedja

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Pri izračunu limite si bomo pomagali z L'Hospitalovim pravilom in pa s substitucijo $x = \frac{1}{n}$.

$$\int_0^1 2^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{2}-1} = \lim_{x\to 0} \frac{x2^x}{2^x - 1} = \lim_{x\to 0} \frac{2^x + x(\ln 2)2^x}{(\ln 2)2^x} = \underline{\underline{\frac{1}{\ln 2}}}.$$

□

(2) Izračunaj določene integrale s pomočjo Newton-Leibnizeve formule:

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi} x\sin x\,dx,$

(d) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx.$

Rešitev: Določeni integral je s pomočjo Riemannovih vsot praviloma zelo težko izračunati, zato ga običajno računamo s pomočjo Newton-Leibnizeve formule. Naj bosta f in F zvezni funkciji na $[a, b]$, za kateri je $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (a, b)$. Potem velja

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

(a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 x\,dx = \int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \left(\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\Big|_0^{2\pi} = \underline{\underline{\pi}}.$

Opomba: Na podoben integral pogosto naletimo, zato se splača zapomniti naslednjo dejstvo. Velja

$$\int_a^b \sin^2 kx\,dx = \int_a^b \cos^2 kx\,dx = \frac{b-a}{2},$$

če je dolžina intervala $[a, b]$ večkratnik periode funkcij $\sin kx$ oziroma $\cos kx$. To pomeni, da je $b - a = n \cdot \frac{2\pi}{k}$ za neko naravno število n.

(b) Za izračun tega integrala bomo uporabili substitucijo $\cos x = t$, ki da $-\sin x\,dx = dt$. Pri tem se meje integracije transformirajo po pravilu

$$x = 0 \Longrightarrow t = 1,$$
$$x = \frac{\pi}{4} \Longrightarrow t = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Sledi

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\int_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dt}{t} = -\ln|t|\Big|_1^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\ln\frac{\sqrt{2}}{2} = \underline{\underline{\frac{\ln 2}{2}}}.$$

(c) Pri tem integralu bomo uporabili formulo za integracijo določenega integrala po delih

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du.$$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = (-x\cos x)\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x\,dx = \pi + \sin x\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}}.$$

(d) Za izračun zadnjega integrala najprej opomnimo, da velja

$$\sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} = \sqrt{\cos^2 x} = \begin{cases} \cos x & ;\ x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ -\cos x & ;\ x \in [\frac{\pi}{2}, \pi]. \end{cases}$$

Tako dobimo

$$\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \sin x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 1 - (-1) = \underline{\underline{2}}.$$

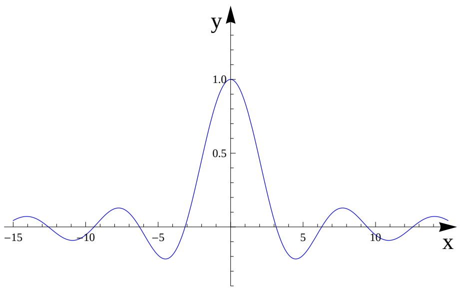
$\square$

(3) S trapezno metodo za $n = 4$ in Simpsonovo metodo za $n = 2$ približno izračunaj integral

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

Rešitev: Pri tej nalogi bomo spoznali dve numerični metodi za približni izračun določenega integrala, ne da bi dejansko poznali nedoločeni integral. To je še posebej uporabno, ko imamo opravka s funkcijami, katerih nedoločeni integrali niso elementarne funkcije.

Kot primer si bomo pogledali funkcijo $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Rečemo ji tudi sinc funkcija, uporablja pa se pri filtriranju signalov.



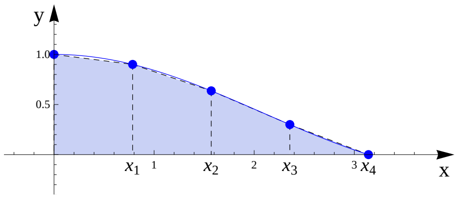
Pri trapezni metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a, b]$, aproksimiramo z unijo trapezov. Pri tem uporabljamo naslednji algoritem:

- Razdeli $[a, b]$ s točkami $x_i = a + i \cdot \dfrac{(b-a)}{n}$, za $0 \leq i \leq n$, na n delov in piši $y_i = f(x_i)$.
- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \frac{b-a}{2n}\,(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n) + R_n.$

Izraz R_n je napaka aproksimacije, ki jo lahko ocenimo navzgor s formulo

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)|.$$

Vsak izmed dobljenih n trapezov ima višino enako $\frac{b-a}{n}$, izraz v oklepaju pa predstavlja dvakratnik vsote njihovih srednjic. V našem primeru bomo lik, ki je pod grafom funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[0, \pi]$, aproksimirali s štirimi trapezi.



Vidimo, da se naš približek le malo razlikuje od dejanskega lika.

Najprej napišimo tabelo vrednosti:

x_i	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y_i	1.000	0.900	0.636	0.300	0.000

Od tod dobimo aproksimacijo

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{\pi}{8}\,(1+2(0.900+0.636+0.300)+0) = \underline{\underline{1.835}}.$$

Pri Simpsonovi metodi lik, ki ga določa funkcija f na $[a,b]$, aproksimiramo z unijo n likov, ki so od zgoraj omejeni s kvadratno parabolo, ki interpolira po tri zaporedne točke. V tem primeru vzamemo $2n$ delilnih točk. Določeni integral je potem enak

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6n}\,(y_0+4y_1+2y_2+\cdots+4y_{2n-1}+y_{2n})+R_n,$$

kjer lahko napako aproksimacije ocenimo s formulo

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4}\max_{x\in[a,b]}|f^{(4)}(x)|.$$

V tem primeru bomo lik, ki je pod grafom funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ na intervalu $[0,\pi]$, aproksimirali z dvema likoma, ki sta omejena z grafoma parabol, ki interpolirata točke $\{(x_0,f(x_0)),(x_1,f(x_1)),(x_2,f(x_2))\}$ oziroma $\{(x_2,f(x_2)),(x_3,f(x_3)),(x_4,f(x_4))\}$. Sledi

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx \approx \frac{\pi}{12}\,(1+4(0.900+0.300)+2\cdot 0.636+0) = \underline{\underline{1.851}}.$$

Natančna vrednost tega integrala, zaokroženega na tri decimalke, je enaka

$$\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}\,dx = \underline{\underline{1.852}}.$$

Vidimo, da je aproksimacija s Simpsonovo metodo precej dobra.

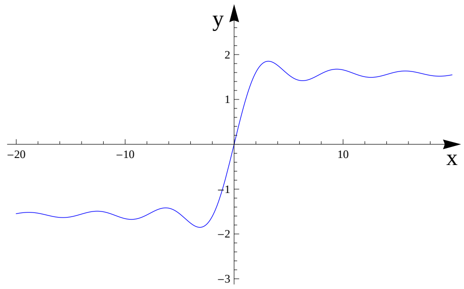
<u>Opomba</u>: Funkcija

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt$$

je nedoločen integral funkcije $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Imenujemo jo integralski sinus. Je omejena, s pomočjo metod kompleksne integracije pa lahko pokažemo, da velja

$$\lim_{x\to\infty}\mathrm{Si}(x) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Poglejmo še njen graf.



$\square$

(4) Izračunaj izlimitirane integrale:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$,

(b) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$,

(c) $\displaystyle\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx$.

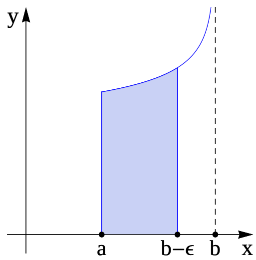
Rešitev: Določeni integral je v osnovni verziji definiran za zvezne funkcije na končnem zaprtem intervalu. Njegovim posplošitvam na funkcije, ki imajo pole, ali pa na neomejena območja pa rečemo izlimitirani integrali.

Če želimo izračunati takšen integral, integracijsko območje najprej razkosamo na intervale, tako da bomo na vsakem intervalu imeli singularnost v največ enem krajišču ali pa da bo interval neomejen le v eno smer.

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a,b)$, ki je neomejena v okolici točke b. V takšnih primerih lahko definiramo izlimitirani integral

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Geometrično to pomeni, da lahko ploščino lika, ki je sicer neomejen, poljubno dobro aproksimiramo s ploščinami omejenih likov. Analogno lahko definiramo izlimitirani integral, če je funkcija neomejena v levem krajišču.



(a) $$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_0^{1-\epsilon}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\left(\arcsin x\Big|_0^{1-\epsilon}\right) = \lim_{\epsilon\to 0+}\arcsin(1-\epsilon) = \underline{\underline{\frac{\pi}{2}}}.$$

(b) $$\int_0^1 \ln x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_\epsilon^1 \ln x\,dx = \lim_{\epsilon\to 0+}(x\ln x - x)\Big|_\epsilon^1 = \lim_{\epsilon\to 0+}(-1-(\epsilon\ln\epsilon-\epsilon)) = \underline{\underline{-1}}.$$

Integral smo izračunali s pomočjo integracije po delih, pri limiti pa smo upoštevali, da velja $\lim\limits_{\epsilon\to 0+}\epsilon\ln\epsilon = 0$, kar lahko pokažemo s pomočjo L'Hospitalovega pravila.

(c) Tokrat ima funkcija $f(x) = \frac{1}{x-2}$ pol v notranji točki $x = 2$ intervala $[0, 3]$, zato bomo integral razdelili na dva kosa. Po definiciji je

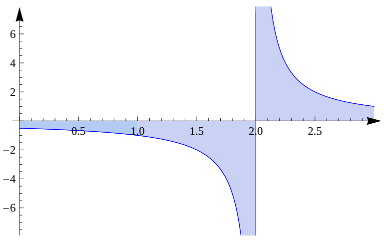
$$\int_0^3 f(x)\,dx = \lim_{\epsilon \to 0+} \int_0^{2-\epsilon} f(x)\,dx + \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{2+\epsilon}^3 f(x)\,dx,$$

če obstajata obe limiti na desni. V našem primeru tako dobimo

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx &= \lim_{\delta \to 0+} \int_0^{2-\epsilon} \frac{1}{x-2}\,dx + \lim_{\epsilon \to 0+} \int_{2+\epsilon}^3 \frac{1}{x-2}\,dx, \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\ln|x-2| \Big|_0^{2-\epsilon} \right) + \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\ln|x-2| \Big|_{2+\epsilon}^{3} \right), \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} (\ln \epsilon - \ln 2) + \lim_{\epsilon \to 0+} (-\ln \epsilon)\,.
\end{aligned}$$

Nobena izmed teh dveh limit ne obstaja, zato integral $\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx$ ne konvergira.

Opomba: Če bi izraza v zgornjih dveh limitah združili pod eno limito, bi tako dobljena limita obstajala. Tej verziji integrala rečemo Cauchyjeva glavna vrednost.



V tem primeru imamo opravka z dvema likoma z neskončnima ploščinama, ki pa sta različno predznačeni. Zato si lahko intuitivno mislimo, da se ploščini delov, ki sta skladna, seštejeta v 0. Tako dobimo

$$\begin{aligned}
\text{v.p.} \int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx &= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\int_0^{2-\epsilon} \frac{1}{x-2}\,dx + \int_{2+\epsilon}^3 \frac{1}{x-2}\,dx \right), \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} \left(\ln|x-2| \Big|_0^{2-\epsilon} + \ln|x-2| \Big|_{2+\epsilon}^{3} \right), \\
&= \lim_{\epsilon \to 0+} (\ln \epsilon - \ln 2 - \ln \epsilon)\,, \\
&= \underline{\underline{-\ln 2}}.
\end{aligned}$$

□

(5) Izračunaj izlimitirana integrala:

(a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x \ln x}$,

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2 + 4x + 5}\,dx$.

Rešitev: Če je f zvezna funkcija na intervalu $[a, \infty)$, definiramo izlimitirani integral s predpisom

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty}\int_a^c f(x)\,dx,$$

če limita na desni obstaja. Analogno definiramo tudi izlimitirane integrale v primeru, ko je integracijski interval odprt na levi strani.

(a) $\displaystyle\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x}$:

Pri računanju bomo uvedli novo spremenljivko $t = \ln x$.

$$\int_e^\infty \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{c\to\infty}\int_e^c \frac{dx}{x\ln x} = \lim_{c\to\infty}\int_1^{\ln c}\frac{dt}{t} = \lim_{c\to\infty}\ln|t|\Big|_1^{\ln c} = \lim_{c\to\infty}\ln(\ln c) = \infty.$$

Vidimo, da ta integral ne konvergira.

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx$:

V tem primeru integriramo zvezno funkcijo po intervalu, ki je neomejen v obe smeri, zato bomo integracijski interval razdelili na dva podintervala.

Nedoločeni integral bomo izračunali z uvedbo nove spremenljivke $t = x + 2$.

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx &= \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx + \lim_{c\to\infty}\int_0^c \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx,\\ &= \lim_{c\to-\infty}\operatorname{arc\,tg}(x+2)\Big|_c^0 + \lim_{c\to\infty}\operatorname{arc\,tg}(x+2)\Big|_0^c,\\ &= \operatorname{arc\,tg} 2 - \left(-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} 2 = \underline{\underline{\pi}}.\end{aligned}$$

□

(6) Ugotovi, ali izlimitirani integrali konvergirajo ali divergirajo:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx,$

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}\,dx,$

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx.$

Rešitev: Izlimitiranih integralov praviloma ne znamo vedno izračunati. Včasih pa je koristna že zgolj informacija, ali dani integral sploh konvergira. Le-to lahko dobimo s pomočjo naslednjih kriterijev:

(a) Naj bo g zvezna funkcija na intervalu $[a,b]$.

- $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$ konvergira, če je $s<1$.
- $\displaystyle\int\limits_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s}\,dx$ divergira, če je $s\geq 1$ in $g(a)\neq 0$.

(b) Naj bo g zvezna in omejena funkcija na intervalu $[a,\infty)$.

- $\displaystyle\int\limits_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ konvergira, če je $s>1$.
- $\displaystyle\int\limits_a^\infty \frac{g(x)}{x^s}\,dx$ divergira, če je $s\leq 1$ in $|g(x)|>m>0$ za vse x od nekje dalje.

Pri določanju konvergence izlimitiranih integralov tako ponavadi najprej uganemo, katera izmed zgornjih možnosti nastopi, nato pa poskušamo integrand zapisati v ustrezni obliki.

(a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx$:

Pri tem integralu imamo singularnost pri $x=1$. Najprej zapišimo

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}=\frac{1}{\sqrt{(1-x)(1+x)(1+x^2)}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}.$$

Če definiramo $g(x)=\frac{1}{\sqrt{(1+x)(1+x^2)}}$, je g zvezna funkcija na intervalu $[0,1]$. Ker je še $s=1/2<1$, ta integral konvergira.

(b) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}\,dx$:

Integrand je zvezna funkcija na neomejenem integracijskem intervalu $[1,\infty)$. Zato moramo ugotoviti ali dani integral konvergira v neskončnosti. Zapišimo

$$\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}=\frac{\frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}}{x^2}$$

in definirajmo $g(x)=\frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}$. Tako definirana funkcija g je zvezna na intervalu $[1,\infty)$, njena limita pri $x\to\infty$ pa je

$$\lim_{x\to\infty} g(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\sqrt{1+x^2}}{x^3+1}=1.$$

Iz obstoja limite v neskončnosti in pa zveznosti sklepamo, da je funkcija g omejena na intervalu $[1, \infty)$. Poleg tega je $s = 2$, zato dani integral konvergira.

(c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$:

Sedaj nas zanima konvergenca integrala Gaussove funkcije. Ker je Gaussova funkcija soda funkcija, je dovolj obravnavati samo konvergenco integrala

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

<u>$x \to \infty$</u>: Pišimo

$$e^{-x^2} = \frac{\frac{x^2}{e^{x^2}}}{x^2}.$$

Funkcija $g(x) = \frac{x^2}{e^{x^2}}$ je zvezna na intervalu $[0, \infty)$. Da bi pokazali, da je omejena, bomo pokazali, da je $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$. Pomagali si bomo z L'Hospitalovim pravilom in z uvedbo nove spremenljivke $t = x^2$.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{e^t} = 0.$$

Ker je $s = 2 > 1$, integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx$ konvergira. $\square$