Vaje Ana2Uni – FRI

Seznam primernih vaj in kakšna rešitev ...

Prvič sestavljeno: 12. januar 2007
Zadnji popravek 27. marec 2008

Opozorilo

Ti zapiski vsebujejo napake. Odkrivanje in odpravljanje le-teh je sestavni del učnega procesa.

Kazalo

1 Krivulje v ravnini

1.1 Parametrično podane krivulje

Naloga 1.1.1. *Parametriziraj premico v ravnini, ki gre skozi točki* $(1, 1)$ *in* $(-2, 4)$ *ter krožnico, s polmerom* 3 *in središčem v* $(-1, 1)$. *Poišči presečišča teh dveh krivulj.*

Rešitev:
Parametrična enačba poljubne premice je

$$x(t) = x_0 + (x_1 - x_0)t,$$

$$y(t) = y_0 + (y_1 - y_0)t,$$

kjer sta $A(x_0, y_0)$ in $B(x_1, y_1)$ točki, skozi kateri premica poteka. Potem je enačba naše premice $x(t) = 1 - 3t$ in $y(t) = 1 + 3t$. Parametrična enačba krožnice je

$$x(t) = r \cdot \cos t + x_0,$$

$$y(t) = r \cdot \sin t + y_0,$$

če je r polmer krožnice s središčem v $S(x_0, y_0)$. Potem je enačba naše krožnice $x(t) = 3\cos t - 1$ in $y(t) = 3\sin t + 1$. Za računanje presečišč si zadevo olajšamo s pretvorbo obeh enačb v standardno obliko. Torej je enačba premice

$$y - y_0 = \left(\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\right)(x - x_0)$$

in enačba krožnice

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2,$$

če je $S(a, b)$. Potem je enačba premice $y = -x + 2$ in enačba krožnice $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$. Vstavimo prvo enačbo v drugo in dobimo vrednosti $x = \pm\sqrt{\frac{7}{2}}$ in $y = \mp\sqrt{\frac{7}{2}} + 2$. Torej sta presečišči v točkah $P_1\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, -\sqrt{\frac{7}{2}} + 2\right)$ in $P_2\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \sqrt{\frac{7}{2}} + 2\right)$. □

Naloga 1.1.2. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot* $x(t) = 2t - t^2$ *in* $y(t) = 2t^2 - t^3$. *Poišči točke na krivulji, kjer je tangenta na krivuljo vzporedna kateri izmed koordinatnih osi. Skiciraj krivuljo. Izračunaj ploščino lika, ki ga krivulja opiše v prvem kvadrantu.*

Rešitev:

Tangenta na krivuljo je vzporedna ordinatni osi, kadar je

$$\dot{x}(t) = 0$$

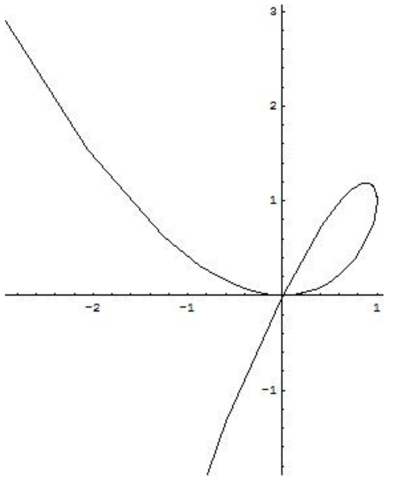
in vzporedna abscisni osi, kadar je

$$\dot{y}(t) = 0$$

$\dot{x}(t)$ je enak 0 pri $t = 1$, $\dot{y}(t)$ pa pri $t = 0$ in $t = \frac{4}{3}$. Ploščina lika, ki ga krivulja opiše v prvem kvadrantu, je enaka

$$S = \frac{1}{2}\int_0^2 (\dot{x}y - x\dot{y})dt = \frac{8}{15}.$$

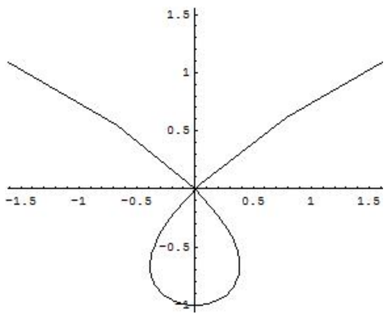
□



Slika 1: Krivulja z zanko.

Naloga 1.1.3. *Nariši graf krivulje, podane v parametrični obliki kot* $\vec{r}(t) = (t^3 - t, t^2 - 1)$. *Izračunaj tudi ploščino zanke, ki jo opiše krivulja.*

Rešitev:



Slika 2: Še ena krivulja z zanko.

Tako podana funkcija opiše zanko, ki je simetrična glede na ordinatno os, začne in konča pa se v koordinatnem izhodišču. Funkcija vstopi skozi izhodišče pri $t = -1$, izstopi pa pri $t = 1$. Ploščini bi se odšteli ob prehodu v drug kvadrant, zato je treba biti pazljiv pri tvorjenju integrala. Vzamemo robne vrednosti t za eno od polovic zanke in vstavimo v integral:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^1 \left[(3t^2 - 1)(t^2 - 1) + (t^3 - t)(2t)\right] dt = \frac{8}{15}.$$

□

Naloga 1.1.4. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot* $x(t) = \frac{-1}{1+t^2}$ *in* $y(t) = \frac{t^3}{1+t^2}$.

1. *Skiciraj krivuljo. Izračunaj tudi asimptoto.*

2. *Ali je ploščina lika, ki ga opišeta krivulja in njena asimptota končna?*
   Namig: Ploščine ni nujno do konca izračunati.

Rešitev:

□

Naloga 1.1.5. *S pomočjo parametrizacije v ravnini izpelji formulo za obseg kroga.*

Rešitev:
Če poznamo parametrično enačbo krožnice, potem sta njena odvoda $\dot{x}(t) = r \cdot (-\sin t)$ in $\dot{y}(t) = r \cdot (\cos t)$, in lahko z uporabo formule za izračun dolžine loka

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$$

dokažemo, da je obseg kroga o enak $2\pi r$, če za t_1 vzamemo 0, za t_2 pa 2π (en obhod). Potem je

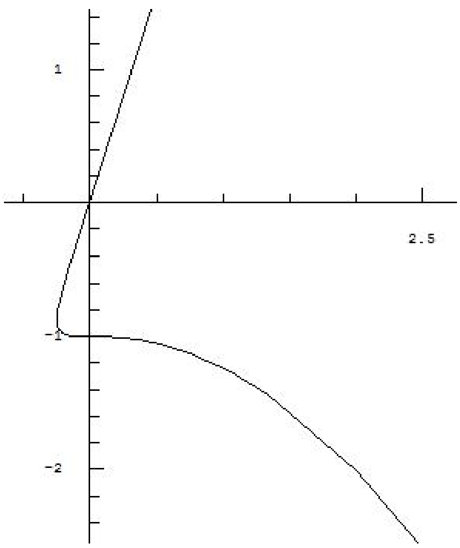
$$l = 2\pi r.$$

□

Naloga 1.1.6. *Nariši graf krivulje, podane v parametrični obliki kot $\vec{r}(t) = (t^2 - t, t^3 - 1)$.*

Rešitev:

□



Slika 3: $\vec{r}(t) = (t^2 - t, t^3 - 1)$.

Naloga 1.1.7. *Krivulja v ravnini je parametrizirana kot $x(t) = te^t$ in $y(t) = te^{-t}$. Skiciraj krivuljo in določi enačbo tangente pri $t = 1/2$.*

Rešitev:
Enačba tangente v parametrični obliki je:

$$y = y(t_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)} \cdot (x - x(t_0))$$

V $t = \frac{1}{2}$ je torej $y(\frac{1}{2}) = \dot{y}(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2\sqrt{e}}$, $x(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{e}}{2}$, $\dot{x}(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{e}}{2}$, koeficient tangente $\frac{1}{3e}$ in njena enačba

$$y = \frac{1}{3e} \cdot x + \frac{1}{3\sqrt{e}}.$$

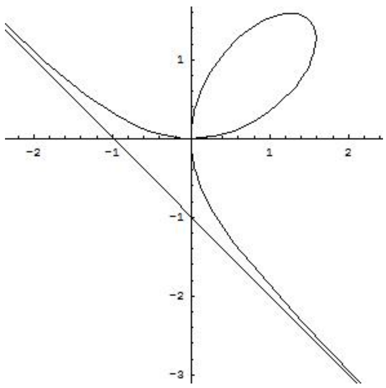
$\square$

Naloga 1.1.8. *Skiciraj krivuljo, ki se imenuje "Descartesov list". Podana je paremetrično:*

$$x(t) = \frac{3t}{1+t^3} \qquad\qquad y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}\ .$$

Izračunaj tudi asimptoto in na koncu izračunaj še ploščino "lista".

Rešitev:



Slika 4: Descartesov list.

Asimptota je krivulja, h kateri se neka funkcija približuje, z enačbo oblike $y = kx + n$, kjer je

$$k = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$$

in

$$n = \lim_{x\to\infty} (y - kx).$$

Ko sta y in x podana neodvisno, takrat pošljemo t proti tisti vrednosti, kamor gre funkcija v neskončnost. Torej je

$$k = \lim_{t\to -1} \left(\frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}\right) = \lim_{t\to -1} t = -1$$

in

$$n = \lim_{t \to -1} (y(t) - (-1) \cdot x(t)) = \lim_{t \to -1} \frac{3t(t+1)}{(1+t)(1-t+t^2)} = -1.$$

Enačba asimptote je torej

$$y = -x - 1.$$

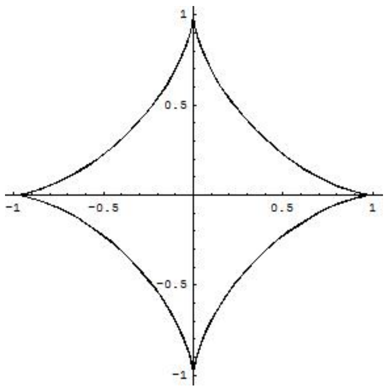
Ploščina lista je

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\dot{x}y - x\dot{y}) dt = \frac{3}{2}.$$

(t pošljemo v neskončnost, saj se proti neskončnosti zanka zaključuje.) □

Naloga 1.1.9. *Krivulja z imenom "astroida"je podana parametrično kot* $\vec{r}(t) = \left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$. *Ugotovi, od kod njeno ime (tako da jo narišeš) in izračunaj njeno dolžino.*

Rešitev:
Ker je astroida osno somerna, lahko samo z izračunom enega njenega loka dobimo njeno celotno



Slika 5: Astroida.

dolžino. Ker sta cos in sin periodični funkciji, se funkciji po $t = 2\pi$ ponavljata, zato je smiselno gledati vrednosti t samo od 0 do 2π. Torej je dolžina astroide

$$l = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = 6.$$

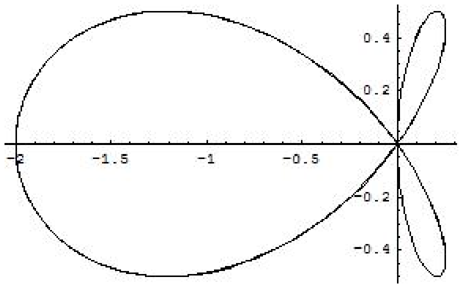
□

1.2 Krivulje, podane s polarnim zapisom

Naloga 1.2.1. *Izračunaj ploščino "ribe", ki je za* $a > 0$ *podana parametrično kot*

$$\vec{r}(t) = (-a \cos t(1 + \cos t), -a \cos t \sin t) \ .$$

Krivuljo zapiši tudi v polarni obliki.



Slika 6: Riba pri a=1.

Rešitev:
Narava te krivulje je podobna kot pri tisti zanki pri zgornji nalogi, namreč, da se ploščine začnejo odštevati, ko skoči krivulja v drugi kvadrant. Vendar pa tu krivulja leži v štirih kvadrantih, ne samo v dveh. Prezrcali se čez x os, zato lahko vzamemo po dve in dve četrtini krivulje, in tako zapišemo enačbo:

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\dot{x}y - x\dot{y})dt + 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\dot{x}y - x\dot{y})dt$$

Na srečo so integrali aditivni, pa še ulomki se krajšajo. Ostane le neprijetna operacija dejanskega integriranja, zato nasvet: če se znajdeš med integriranjem funkcije $\cos^3 x$, potem si pomagaj s prevajanjem na trojne kote:

$$\cos 3x = \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x$$

$$\sin 3x = 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x$$

Rezultat je $S = \frac{8}{3}a^2$. Poglej za primer $x(t) = -\cos t(1+\cos t)$ in $y(t) = -\cos t \sin t$, da je ploščina res $\frac{8}{3}(\doteq 2,7)$. $\square$

Naloga 1.2.2. *Strofoida je krivulja, podana v polarni obliki z enačbo*

$$r(\varphi) = a\frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}, \qquad a > 0 .$$

Skiciraj krivuljo (poračunaj tudi asimptoto) in izračunaj ploščino njene zanke.

Rešitev:

Ob pretvorbi iz polarne oblike v parametrično dobimo

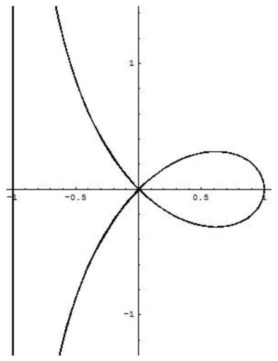
$$x(\varphi) = a\cos 2\varphi$$

in

$$y(\varphi) = a\frac{\sin\varphi\cos 2\varphi}{\cos\varphi} = a\tan\varphi\cos 2\varphi.$$

Pri odvajanju obeh zadev dobimo $\dot{x}(\varphi) = -a2\sin 2\varphi$ in $\dot{y}(\varphi) = a(1-\tan^2\varphi - 4\sin^2\varphi)$. Koeficient asimptote je torej

$$\lim_{\varphi\to\frac{\pi}{2}} \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)} = \infty$$



Slika 7: Strofoida.

(φ pošljemo v tisto vrednost, kjer se funkcija približuje neskončnosti.) Ta račun pokaže, da je asimptota navpična, torej je njena enačba oblike

$$x = m.$$

Torej mora veljati

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} (x(\varphi) - m) = 0.$$

Za $x(\varphi)$ vstavimo $a \cos 2\varphi$ in dobimo

$$\lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} (a \cos 2\varphi - m) = 0$$

ter

$$-a - m = 0$$

in s tem

$$m = -a.$$

Enačba ploščine za krivuljo, podano v polarni obliki, je

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

Podobno kot prej, pazimo na zgornjo in spodnjo mejo. Recimo, da gledamo kot φ od 0 do $\frac{\pi}{4}$ - tam dobimo polovico iskane ploščine. Torej je velikost ploščine naše zanke enaka

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(a \frac{\cos 2\varphi}{\cos \varphi} \right)^2 d\varphi.$$

Iskana ploščina zanke pri poljubnem a je torej

$$S = a^2 \left(2 - \frac{\pi}{2} \right).$$

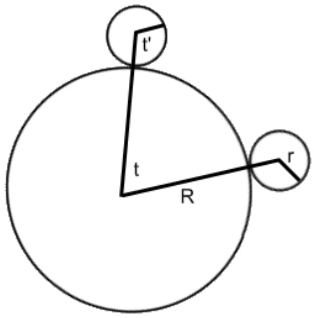
□

Naloga 1.2.3. *Opiši gibanje točke na manjšem obroču, ki se kotali po obodu večjega obroča, na njegovi zunanji strani. Lahko privzameš, da je radij večjega obroča večkratnik radija manjšega. Takšni krivulji pravimo* epicikloida.

Rešitev:
Epicikloido dobimo tako, da sledimo točki na krožnici s polmerom r, ki se kotali po zunanji strani neke druge krožnice s polmerom R. t predstavlja kot, s katerim se središče malega kroga premika glede na središče velikega kroga, t' pa kot, s katerim se premika opazovana točka, ki leži na obodu malega kroga okrog njegovega središča (glede na začetni položaj). Velja

$$t \cdot R = t' \cdot r - t \cdot r$$

$$t' = \frac{r + R}{r} \cdot t.$$



Slika 8: Konstrukcija epicikloide.

Enačba za epicikloido je potem

$$x(t) = (r + R) \cdot \cos t - r \cdot \cos t' = (r + R) \cdot \cos t - r \cdot \sin \left(\frac{r + R}{r} t \right)$$

$$y(t) = (r + R) \cdot \sin t - r \cdot \sin t' = (r + R) \cdot \sin t - r \cdot \sin \left(\frac{r + R}{r} t \right).$$

□

Naloga 1.2.4. *Opiši gibanje točke na manjšem obroču, ki se kotali po obodu večjega obroča, na njegovi notranji strani. Lahko privzameš, da je radij večjega obroča večkratnik radija manjšega. Takšni krivulji pravimo* hipocikloida.

Rešitev:
Hipocikloido dobimo tako, da sledimo točki na krožnici z polmerom r, ki se kotali po notranji strani neke druge krožnice s polmerom R. Pravzaprav rišemo cikloido na notranjo stran krožnice. Spremenljivka t predstavlja kot, s katerim se središče malega kroga premika glede na središče velikega kroga. Velja

$$x(t) = (r - R) \cdot \cos t - r \cdot \cos \left(\frac{r - R}{r} t \right)$$

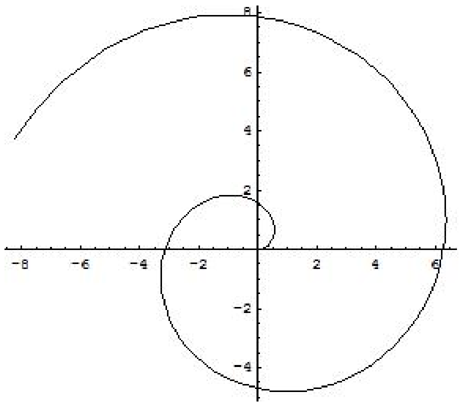
in

$$y(t) = (r - R) \cdot \sin t - r \cdot \sin\left(\frac{r - R}{r} t\right).$$

□

Naloga 1.2.5. *Skiciraj Arhimedovo spiralo, podano z* $r(\varphi) = a\varphi$ *in logaritemsko spiralo, podano z* $r(\varphi) = ae^{m\varphi}$*. Dokaži, da logaritemska spirala seka vsak poltrak iz koordinatnega izhodišča pod istim kotom.*

Rešitev:



Slika 9: Arhimedova spirala.

Formula za izračun kota med dvema premicama je

$$\tan\alpha = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Dokazati moramo, da ta kot pri logaritemski spirali ni odvisen od spremembe kota φ. k_1 naj bo koeficient poltraka iz koordinatnega izhodišča, k_2 pa koeficient tangente na logaritemsko spiralo v presečišču s poltrakom. Torej je

$$k_1 = \tan\varphi$$

in

$$k_2 = \frac{\dot{y}(\varphi)}{\dot{x}(\varphi)}.$$

Pri parametrizaciji logaritemske spirale dobimo $x(\varphi) = ae^{m\varphi}\cos\varphi$ in $y(\varphi) = ae^{m\varphi}\sin\varphi$. Če odvajamo $x(\varphi)$ in $y(\varphi)$, in vse skupaj vstavimo v enačbo za izračun kota med dvema premicama, dobimo, da je

$$\tan\alpha = \frac{1}{m}$$

oziroma

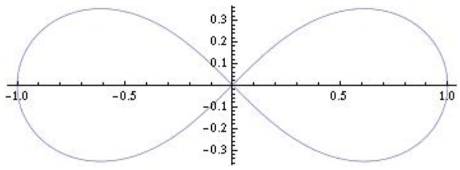
$$\alpha = \arctan\frac{1}{m}.$$

Kot med poltrakom in tangento torej res ni odvisen od kota, glede na katerega se logaritemska spirala giblje, ampak samo od podanega začetnega m. □

Naloga 1.2.6. *S pomočjo prevedbe na polarni koordinatni sistem, skiciraj graf funkcije, podane z enačbo*

$$\left(x^2+y^2\right)^2 = a^2\left(x^2-y^2\right) .$$

Rešitev:



Slika 10: Skica krivulje za $a = 1$.

Zapišemo

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos(\varphi)$$

in

$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin(\varphi)$$

Če zamenjamo v prvotni enčbi bomo dobili

$$\left(r^2(\varphi)\cos^2(\varphi) + r^2(\varphi)\sin^2(\varphi)\right)^2 = a^2\left(r^2(\varphi)\cos^2(\varphi) - r^2(\varphi)\sin(\varphi)\right)$$

oziroma

$$r^4(\varphi) = a^2 r^2(\varphi)\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right)$$

Če to malo preuredimo bomo dobili

$$r(\varphi) = a\sqrt{\cos(2\varphi)}$$

Definicijsko območje naše funkcije je $D_f = \left[0, \frac{\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi\right] \cup \left[\frac{7}{4}\pi, 2\pi\right]$ □

Naloga 1.2.7. *Skiciraj in izračunaj dolžino loka krivulje*

$$r(\varphi) = a\sin^3\frac{\varphi}{3} .$$

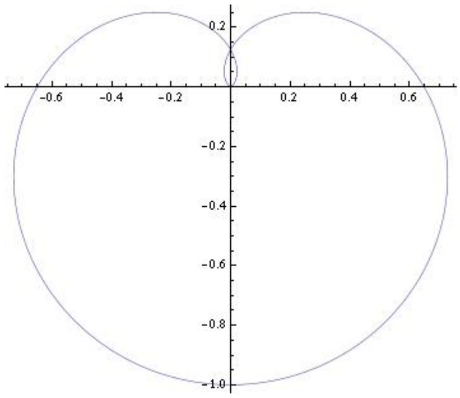
Rešitev:

Dolžino loka krivulje (skicirane na sliki 11) bomo izračunali z uporabo formule:

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{r^2(\varphi) + \dot{r}^2(\varphi)}$$

Imamo

$$r(\varphi) = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$$



Slika 11: Jabolko.

in

$$\dot{r}(\varphi) = a \sin^2 \frac{\varphi}{3} \cos \frac{\varphi}{3}$$

To vstavimo v formulo za izračun dolžine loka in dobimo

$$l = \int_0^{3\pi} \sqrt{a^2 \sin^6 \frac{\varphi}{3} + a^2 \sin^4 \frac{\varphi}{3} \cos^2 \frac{\varphi}{3}}$$

Z računanjem integrala dobimo da je dolžina loka enaka $l = \frac{3\pi}{2} a$

□

Naloga 1.2.8. *Nariši graf in določi ploščino lika, ki ga opiše krivulja, podana z enačbo*

$$r(\varphi) = 2a \cos 3\varphi \,, \qquad a > 0 \,.$$

Rešitev:

Ploščino lika (skiciranega na sliki 12) bomo dobili s uporabo formule

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r^2(\varphi)\, d\varphi$$

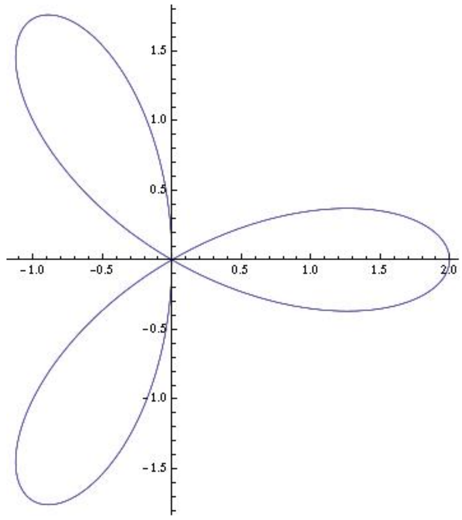
Integriramo

$$A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2} 4a^2 \cos^2 3\varphi \, d\varphi$$

in dobimo, da je ploščina

$$A_1 = a \frac{1}{6} (\pi + \sin(\pi))$$

To je samo šestina ploščine lika, zato je celotna ploščina $A = a(\pi + \sin(\pi))$ □



Slika 12: Detelica.

1.3 Krivulje drugega reda (stožernice)

Naloga 1.3.1. *Skiciraj naslednje stožernice.*

a) $x^2 - 2y^2 + 4x - 4y + 1 = 0$

b) $x^2 - 4\sqrt{2}x - 2xy + y^2 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 + 4xy = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y$

d) $3x^2 + 3y^2 + 2xy + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0$

e) $13x^2 + 6\sqrt{15}xy - 29y^2 - 32 = 0$

f) $x^2 + 2xy + y^2 - 6\sqrt{2}x + 6\sqrt{2}y = 0$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

♠ *V delu* ♠

Naloga 1.3.2.

Rešitev:
Dana je funkcija $z = \frac{1}{x}$. Formula za ploščino lika ki ga dobimo, če krivuljo zrotiramo okrog x osi je:

$$P = 2\pi \int_a^b z(x)\sqrt{1 + \dot{z}(x)^2}\, dx$$

To izračunamo in dobimo, da je

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\, dx$$

To lahko zpišemo kot

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx$$

Morali bomo ugotoviti, ali je integral končen ali neskončen. Predpostavimo, da je integral neskončen. Trditev bomo dokazali, če primerjamo naš integral z integralom za keterega že vemo, da je neskončen.

$$P = 2\pi \int_1^\infty \frac{\sqrt{x^4+1}}{x^3}\,dx > P = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\,dx$$

Torej je ploščina neskončna. Volumen lika bomo izračunali s pomočjo formule:

$$V = \pi \int_a^b z^2(x)\,dx$$

oziroma

$$V = \pi \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$$

Izračunamo in dobimo rezultat:

$$V = \pi$$

□

♠ *V delu* ♠

Naloga 1.3.3.

Rešitev:
Dana je funkcija

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Formula za izračun volumna je

$$V = \pi \int_{-a}^a z^2(x)\,dx$$

oziroma

$$V = 2\pi \int_0^a z^2(x)\,dx$$

Iz prvotne funkcije bomo izračunali, da je

$$z^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2$$

Če to damo v formulo za izračun volumna in integriramo, dobimo

$$V = \frac{4}{3}\pi a b^2$$

□

♠ *V delu* ♠

Naloga 1.3.4.

Rešitev:
Dana je funkcija

$$2x^2 + y^2 + 4x - 8y + 14 = 0$$

Funkcjo lahko preoblikujemo tako, da dobimo polne kvadrati. Dobili bomo

$$2(x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 8y + 16) = 4$$

Oziroma

$$\frac{(x+1)^2}{2} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$$

Dobili smo elipso.

□

♠ *V delu* ♠

Naloga 1.3.5.

Rešitev:
Dana je funkcija

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 + 8 = 0$$

Zato ker imamo mešani člen, bomo uporabili nov koordinaten sistem, kjer velja

$$x = X\cos\varphi - Y\sin\varphi$$

and

$$y = X\sin\varphi + Y\cos\varphi$$

Zamenjamo v prvotni enačbi, in potem iščem kot φ pri kateri velja da je mešani člen $XY = 0$. Dobimo enačbo $\cos 2\varphi = 0$, oziroma da je $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Preuredimo enačbo in bomo dobili enačbo

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$

Dobili bomo hiperbolo rotirana za $\varphi = \frac{\pi}{4}$

□

1.4 Krivulje višjih redov

Naloga 1.4.1. *Skiciraj krivuljo, podano z naslednjo zvezo.*

$$x^3 + y^3 - x - y = 0$$

Namig: Uporabi dejstvo, da vsaka točka na ravnini leži na neki premici z enačbo $y = tx$ ali pa premici $x = 0$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 1.4.2. *Podana je enačba* $x^3 + y^3 - x - y = 0$.

1. *Katere od točk* $(1, 0)$, $(2, 2)$, $(-2, 2)$ *ležijo na krivulji, ki jo v ravnini podaja ta enačba?*
2. *Pokaži, da krivulja vsebuje simetralo sodih kvadrantov.*
3. *Določi enačbo tangente na krivuljo v točki* $(0, 1)$.

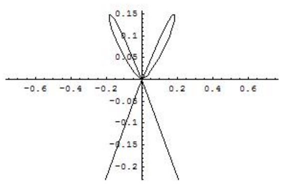
Rešitev:
Pokazali bomo da krivulja vsebuje simetralo kvadrantov. Vemo da je simetrala kvadrantov premica $y = -x$. Če to zamenjamo v prvotni enačbi bomo dobili $x^3 + (-x)^3 - x - (-x) = 0$. □

Naloga 1.4.3. *Skiciraj krivuljo, podano z naslednjo zvezo.*

$$x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$$

Namig: Uporabi dejstvo, da vsaka točka na ravnini leži na neki premici z enačbo $y = tx$ *ali pa premici* $x = 0$.

Rešitev:



Slika 13: Graf krivulje $x^6 - x^2y^3 - y^5 = 0$

Če zapišemo, da je $y = tx$, dobimo naslednjo enačbo:z(x)

$$x^6 - x^5t^3 - x^5t^5 = 0$$

Ali,

$$x^5(x - t^3 - t^5) = 0$$

Sledi da je $x = y = 0$ ali pa $x = t^3 - t^5$ in $y = t^4 - t^6$. Tako imamo krivuljo v paramterični obilki jo lahko narisemo. □

Naloga 1.4.4. *Skiciraj množico točk v ravnini, ki ustreza rešitvi naslednjih dveh (razcepnih!) enačb.*

a) $y^4 + 4xy^2 + 4x^2 - 1 = 0$ *b)* $2y^3 - xy^2 - 2x^2y + x^3 = 0$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 1.4.5. *Podana je krivulja v implicitni obliki:*

$$(x-a)^2(x^2+y^2) - lx^2 = 0 \; .$$

- *Krivuljo zapiši v polarni in parametrični obliki.*
- *Nariši krivuljo za izbiro* $a = 2$ *in* $l = 1$.

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

2 Kompleksna števila

2.1 Osnovne lastnosti $\mathbb{C}$

Naloga 2.1.1. *Naj bo $z = 3 + \sqrt{3}i$ in $w = -1 + \sqrt{3}i$. Poračunaj in nariši naslednja števila:*

$$\bar{x}, \quad z + w, \quad w^2, \quad zw \quad in \quad \tfrac{z}{w}.$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.1.2. *Za vsak $n \in \mathbb{N}$ izračunaj vrednost izraza $1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$.*

Rešitev:
Naj bo $S_n = 1 + i + i^2 + i^3 + \cdots + i^n$. Sledi:
Če $n \mod 4 = 0$ potem, $i^n = 1$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + 1 + \cdots + 1$, ali $S_n = 1$.
Če $n \mod 4 = 1$ potem, $i^n = i$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + 1 + \cdots + 1 + i$, ali $S_n = 1 + i$.
Če $n \mod 4 = 2$ potem, $i^n = -1$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + 1 + \cdots + 1 + i - 1$, ali $S_n = i$.
Če $n \mod 4 = 3$ potem, $i^n = -i$, sledi $S_n = 1 + i - 1 - i + \cdots + 1 + i - 1 - i$, ali $S_n = 0$. □

Naloga 2.1.3. *Naj bosta naravni števili a in b zapisljivi kot vsoti kvadratov dveh naravnih števil. Dokaži, da je potem tudi njun produkt zapisljiv kot vsota kvadratov dveh naravnih števil.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

2.2 Enačbe s kompleksnimi števili

Naloga 2.2.1. *Reši naslednje enačbe nad kompleksnimi števili.*

a) $\bar{z} - 2iz = 1 + i$	*b)* $\bar{z} - iz^2 = 0$
c) $z\bar{z} + 1 = 0$	*d)* $z = 1 + \bar{z}$

Rešitev:
a) Vzamimo $z = x + iy$. Vstavimo v $\bar{z} - 2iz = 1 + i$, in dobimo $(x - iy) - 2i(x + iy) = 1 + i$. Dobili smo sistem dveh enačb, $x + 2y = 1$, $-y - 2x = 1$. Sistem rešimo in dobimo $y = 1$, $x = -1$. Sledi, $z = -1 + i$.
b) Vzamimo $z = x + iy$. Vstavimo v $\bar{z} - iz^2 = 0$, in dobimo $(x - iy)) = i(x + iy)^2$. Dobili smo sistem dveh enačb, $x - 2xy = 0$, $y - x^2 + y^2 = 0$. Sistem rešimo in dobimo $x = 0, y = 0$,

$x=0, y=-1$, $x=\frac{\sqrt{3}}{2}, y=\frac{1}{2}$, $x=\frac{-\sqrt{3}}{2}, y=\frac{1}{2}$. Sledi, $z=0$, $z=-i$, $z=-1+i$, $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$, in $z=\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}$.

c) $z\bar{z}+1=0$, zamenjamo $z\bar{z}=|z|^2$, in dobimo $|z|^2=-1$. To ni možno, sledi enačba nima rešitev.

d) Vzamimo $z=x+iy$. Vstavimo v $z=1+\bar{z}$, in dobimo $(x+iy)=1+(x+iy)$. Dobili smo sistem dveh enačb, $0\cdot x=1$, $2\cdot y=0$. Sistem je očitno nerešljiv. □

Naloga 2.2.2. *Reši splošno kvadratno enačbo $z^2=w$ nad kompleksnimi števili.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

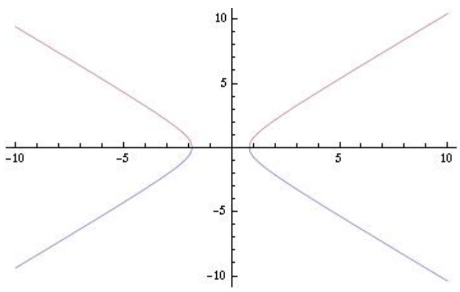
□

2.3 Množice v kompleksni ravnini

Naloga 2.3.1. *Določi in nariši naslednje podmnožice kompleksne ravnine*

a) $\lvert z\rvert=1$	*b)* $\lvert z-3+2i\rvert\le 2$
c) $\mathfrak{Re}(z)+\mathfrak{Im}(z^2)=2$	*d)* $\lvert z-2\rvert\le\lvert z\rvert$

Rešitev:



Slika 14: Graf krivulje $(x+\frac{1}{2})^2-y^2=\frac{7}{4}$

c) Če zapišemo da je $z=x+iy$ in $z^2=x^2+ixy-y^2$ in zamenjamo v zgornji enačbi bomo dobili naslednjo enačbo

$$(x+\frac{1}{2})^2-y^2=\frac{7}{4}$$

Rešitve so vse točke, ki ležijo na tej hiperboli (glej sliko).

□

2.4 Polarni zapis kompleksnega števila

Naloga 2.4.1. *Naj bosta* $z = 1 + i$ *in* $w = -\sqrt{3} + i$ *kompleksni števili.*

- *Izračunaj* w^{12}*. Zapiši tudi prvih nekaj potenc števila* z *in jih nariši.*
- *"Grafično" izračunaj produkt* zw*.*

Naloga 2.4.2. *Izračunaj in nariši pete korene števila* $1 + i$ *ter četrte korene števila* $1 + i\sqrt{3}$*.*

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.4.3. *Poišči vse kompleksne rešitve enačbe*

$$(z-1)^{10} = z^{10} \, .$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□

Naloga 2.4.4. *Dokaži, da je* $\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \pi/4$.

Rešitev:
Vemo da se pri množenju dveh kompleksnih števil njuna argumeta seštejeta in njune absolutne vrednosti zmnožijo. Zato vzamemo $z_1 = 2 + i$ in $z_2 = 3 + i$ (njuna argumenta sta ravno $\arctan(1/2)$ in $\arctan(1/3)$). Njun produkt je $z_1 z_2 = 5 + 5i$, čigar argument je

$$\arctan(1) = \pi/4.$$

□

Naloga 2.4.5. *Naj bosta* $a > 0$ *in* $b > 0$ *pozitivni števili. Skiciraj krivuljo v kompleksni ravnini, ki je podana z enačbo*

$$z(t) = e^{(a+ib)t} \, .$$

Rešitev:

♠ V delu ♠

□