

Vaje od 1. 4. 2008 do 7. 4. 2008

1. Izračunaj vsote naslednjih vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n+1]{2} \right), \quad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{10}{3^n}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}.$$

2. Ugotovi, katere od spodnjih vrst konvergirajo:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^2 + 1}.$$

Pri tem pomeni oznaka $n!$ produkt prvih n naravnih števil;

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n.$$

Pomagaj si s kvocientnim kriterijem. Če pa le-ta odpove, poskusi še s primerjalnim.

3. Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in označimo $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$. *Korenski kriterij* za konvergenco vrst pravi naslednje:

- če je $q < 1$, vrsta konvergira,
- če je $q > 1$, vrsta divergira,
- za $q = 1$ pa kriterij odpove.

Z uporabo korenskega kriterija razišči konvergenco naslednjih vrst:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^n}, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n}}{3^n}, \quad (c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}, \quad (d) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}.$$

4. Katere od spodnjih vrst konvergirajo absolutno, katere le pogojno in katere divergirajo?

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^3}, \quad (b) \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k - \sqrt{k}}, \quad (c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{2^k + 1}, \quad (d) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^{k+1}}{2^k k + 1}.$$

Opomba: Pravimo, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *absolutno konvergira*, če konvergira vrsta s členi $|a_n|$, tj. vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

5. Za katera realna števila d vrsta

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{d^m}{\sqrt{m}}$$

konvergira? Kdaj konvergira absolutno? Kdaj le pogojno?

6. Prepričaj se, da vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2^n}$$

absolutno konvergira, in jo seštej!

Namig: Upoštevaj

$$\frac{n+1}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{n}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \underbrace{\left(\frac{1}{2^n} + \dots + \frac{1}{2^n} \right)}_{n\text{-krat}}$$

in vsoto razbij na vsoto več geometrijskih vrst.

7. Dokaži, da velja

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cos n\alpha = \frac{1 - q \cos \alpha}{1 - 2q \cos \alpha + q^2}$$

za vse $q \in (-1, 1)$, ter, da vrsta v tem primeru konvergira absolutno. Kaj lahko poveš o konvergenci, ko je $q = \pm 1$?

Namig: $e^{in\alpha} = \cos n\alpha + i \sin n\alpha$.