Analiza 2
Rešitve 6. sklopa nalog

Krivulje

(1) Skiciraj tira parametrično podanih krivulj:

(a) $\vec{r}(t) = (3\cos t, \sin t)$ za $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $\vec{r}(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$ za $t \in \mathbb{R}$.

Rešitev: Parametrično podana krivulja je vektorska funkcija oblike

$$\vec{r} : I \to \mathbb{R}^2,$$

kjer je $I \subset \mathbb{R}$ nek interval. Predstavljamo si lahko, da opisuje gibanje točke po ravnini. Parameter t interpretiramo kot čas, vrednosti:

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (x(t), y(t)), \\ \dot{\vec{r}}(t) &= (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) \end{aligned}$$

pa kot položaj oziroma hitrost točke ob času t. Vektor $\vec{r}(t)$ nam pove, kje točka je, vektor $\dot{\vec{r}}(t)$ pa, kam se premika. Parametrično podane krivulje skiciramo na naslednji način:

(1) Najprej skiciramo grafa funkcij x in y.

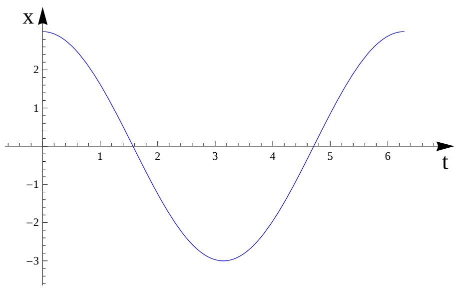
(2) Poiščemo točke, kjer je katera izmed funkcij $x, y, \dot{x}$ ali $\dot{y}$ enaka nič.

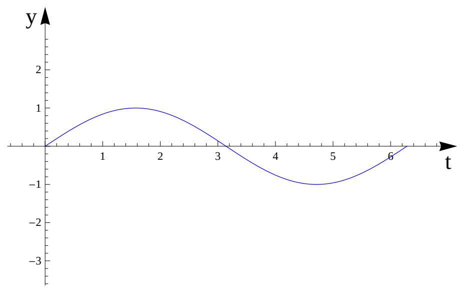
(3) Izračunamo položaje in hitrosti točke ob danih časih in jih označimo na skici. Po potrebi dodamo še kakšno točko.

(4) Z upoštevanjem grafa funkcij x in y skozi dane točke potegnemo krivuljo.

Na intervalih, kjer funkcija x narašča, se točka premika v desno, kjer pa pada, pa v levo. Podobno nam naraščanje funkcije y pove, da se točka premika navzgor, padanje pa pomeni, da se premika navzdol. V stacionarnih točkah funkcije x, je tangenta na tir funkcije navpična, v stacionarnih točkah funkcije y pa vodoravna. Če imata ob nekem času obe funkciji x in y odvod enak nič, se lahko zgodi, da dobimo na tiru ost.

(a) Najprej skicirajmo grafa funkcij x in y.





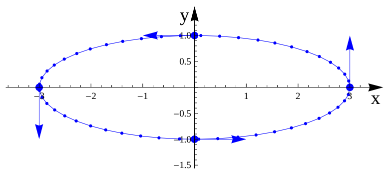
Komponente položaja in hitrosti so enake:

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos t, \\ y(t) &= \sin t, \\ \dot{x}(t) &= -3\sin t, \\ \dot{y}(t) &= \cos t. \end{aligned}$$

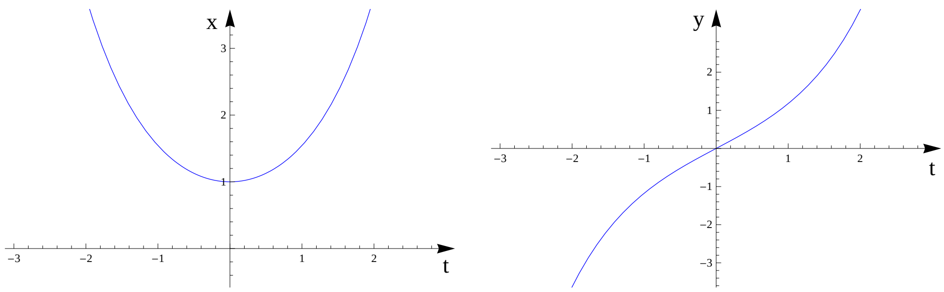
Vzemimo vrednosti $t \in \{0, \pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi\}$ in zapišimo položaje in hitrosti pri teh parametrih v tabelo.

t	$\vec{r}(t)$	$\dot{\vec{r}}(t)$
0	$(3,0)$	$(0,1)$
$\frac{\pi}{2}$	$(0,1)$	$(-3,0)$
π	$(-3,0)$	$(0,-1)$
$\frac{3\pi}{2}$	$(0,-1)$	$(3,0)$
2π	$(3,0)$	$(0,1)$

Če te točke povežemo v krivuljo, dobimo elipso s polosema $a = 3$ in $b = 1$.



(b) Grafa hiperboličnega kosinusa in sinusa sta na spodnji sliki.



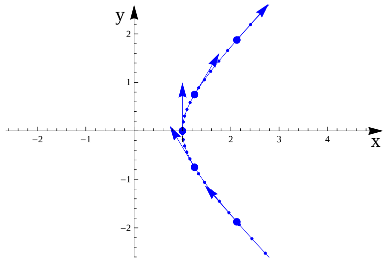
Komponente položaja in hitrosti so tokrat enake:

$$\begin{aligned} x(t) &= \operatorname{ch} t, \\ y(t) &= \operatorname{sh} t, \\ \dot{x}(t) &= \operatorname{sh} t, \\ \dot{y}(t) &= \operatorname{ch} t. \end{aligned}$$

Da bo malce lažje računati, vzemimo vrednosti $t \in \{-\ln 4, -\ln 2, 0, \ln 2, \ln 4\}$.

t	$\vec{r}(t)$	$\dot{\vec{r}}(t)$
$-\ln 4$	$(17/8, -15/8)$	$(-15/8, 17/8)$
$-\ln 2$	$(5/4, -3/4)$	$(-3/4, 5/4)$
0	$(1,0)$	$(0,1)$
$\ln 2$	$(5/4, 3/4)$	$(3/4, 5/4)$
$\ln 4$	$(17/8, 15/8)$	$(15/8, 17/8)$

Če te točke povežemo v krivuljo, dobimo desno vejo hiperbole s polosema $a = 1$ in $b = 1$.



Računsko to sledi iz enakosti

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1,$$

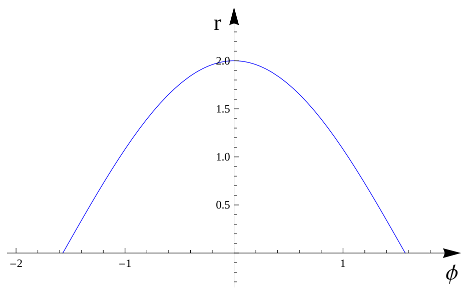
ki velja za vsak $x \in \mathbb{R}$. $\square$

(2) Skiciraj tir krivulje, ki je podana v polarnih koordinatah s predpisom

$$r(\phi) = 2\cos\phi$$

za $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Rešitev: Krivuljo, ki jo podana v polarnih koordinatah, skiciramo tako, da si izberemo nekaj točk na njej, potem pa skoznje poskusimo narisati krivuljo, upoštevajoč, kako se spreminja razdalja točke od izhodišča. Graf funkcije r je na spodnji sliki.



Kot vidimo, je funkcija r soda, kar pomeni, da bo tir krivulje simetričen glede na abscisno os. Izračunajmo sedaj nekaj vrednosti.

ϕ	$r(\phi)$
0	2
$\frac{\pi}{6}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\sqrt{2}$
$\frac{\pi}{3}$	1
$\frac{\pi}{2}$	0

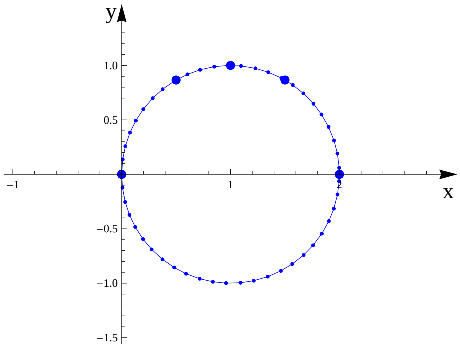
Če te točke povežemo v krivuljo, dobimo krožnico s središčem v točki $(1, 0)$ in polmerom $R = 1$. To lahko dokažemo tako, da najprej zapišemo koordinati x in y v odvisnosti od ϕ:

$$x(\phi) = r(\phi)\cos\phi = 2\cos^2\phi,$$
$$y(\phi) = r(\phi)\sin\phi = \sin 2\phi$$

in nato z uporabo adicijskih izrekov pokažemo, da $x(\phi)$ in $y(\phi)$ zadoščata enačbi

$$(x-1)^2 + y^2 = 1.$$

Poglejmo še skico.



$\square$

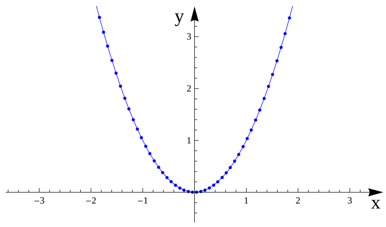
(3) Parabola je podana s parametričnim predpisom $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.

(a) Poišči zvezo med naravnim parametrom in parametrom t.

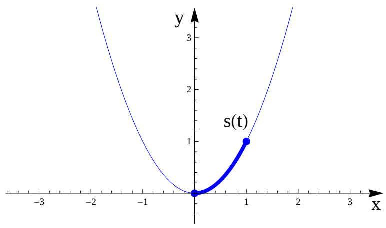
(b) Izračunaj tangentni in normalni vektor.

(c) Kje je ukrivljenost parabole največja?

Rešitev: Imamo dano parabolo, parametrizirano s predpisom $\vec{r}(t) = (t, t^2)$.



(a) Naravni parameter meri dolžino poti vzdolž krivulje od začetne točke, ki ustreza parametru $t = 0$, do dane točke.



Če je gibanje točke po krivulji dano z naravnim parametrom, ima točka enotsko hitrost. Obratno pa je parametrizacija krivulje $\vec{r} = \vec{r}(t)$ naravna, če velja $\dot{\vec{r}}(t) \cdot \dot{\vec{r}}(t) = 1$. V tem primeru odvod namesto s piko označujemo s črtico. Zveza med dano in naravno parametrizacijo krivulje je dana s formulo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt = \int_0^t \sqrt{1 + 4t^2}\, dt.$$

Najprej bomo izračunali nedoločeni integral dane funkcije s pomočjo nastavka:

$$\int \sqrt{1+4t^2}\,dt = \int \frac{1+4t^2}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt = (At+B)\sqrt{1+4t^2} + \int \frac{C}{\sqrt{1+4t^2}}\,dt.$$

Z odvajanjem te enakosti dobimo

$$\frac{1+4t^2}{\sqrt{1+4t^2}} = A\sqrt{1+4t^2} + \frac{(At+B)4t}{\sqrt{1+4t^2}} + \frac{C}{\sqrt{1+4t^2}} = \frac{8At^2+4Bt+A+C}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

S primerjavo koeficientov vidimo, da je $A = C = \frac{1}{2}$ in $B = 0$, kar nam da

$$\int \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(t+\sqrt{t^2+1/4}\right) + C.$$

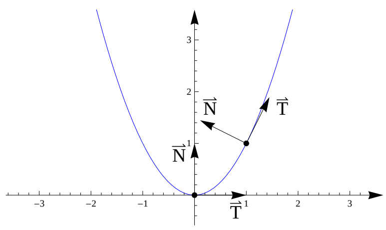
Ko to vstavimo v formulo za naravni parameter, dobimo

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{1+4t^2}\,dt = \frac{1}{2}t\sqrt{1+4t^2} + \frac{1}{4}\ln\left(2t+\sqrt{1+4t^2}\right).$$

(b) Tangentni vektor na krivuljo v dani točki je enotski vektor v smeri tangente na krivuljo. Izračunamo ga z eno izmed formul

$$\vec{T} = \vec{r}\,' = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|},$$

odvisno od tega, kako imamo krivuljo parametrizirano. Normalni vektor je enotski vektor v smeri normale na krivuljo in ki kaže v tisto smer, v katero krivulja zavija.



V našem primeru je:

$$\vec{T} = \frac{(1,2t)}{\sqrt{1+4t^2}},$$
$$\vec{N} = \frac{(-2t,1)}{\sqrt{1+4t^2}}.$$

(c) Ukrivljenost ravninske krivulje v dani točki lahko izračunamo s pomočjo formule

$$\kappa(t) = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}|}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}^3}.$$

Geometrično ukrivljenost krivulje predstavlja hitrost spreminjanja smeri tangente na krivuljo, če se po krivulji premikamo s konstantno enotsko hitrostjo.

Ukrivljenost parabole je enaka

$$\kappa(t) = \frac{2}{\sqrt{1+4t^2}^3}.$$

Vidimo, da je ukrivljenost parabole največja v temenu, nato pa z oddaljevanjem od temena pada proti nič. $\square$

(4) Dana je krivulja $\vec{r}(t) = (\sin t, \operatorname{ch} t, \cos t)$.

(a) Poišči zvezo med naravnim parametrom in parametrom t.
(b) Določi Frenetovo ogrodje in ukrivljenost krivulje v točki $\vec{r}(0)$.
(c) Določi središče pritisnjene krožnice na krivuljo v točki $\vec{r}(0)$.

Rešitev: (a) Najprej izračunajmo zvezo med dano in naravno parametrizacijo krivulje

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sh}^2 t + \sin^2 t}\, dt = \int_0^t \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t}\, dt = \int_0^t \operatorname{ch} t\, dt = \operatorname{sh} t\Big|_0^t = \operatorname{sh} t.$$

(b) Če ima prostorska krivulja v dani točki neničelno ukrivljenost, ji priredimo Frenetovo ogrodje $\{\vec{T}, \vec{N}, \vec{B}\}$, kjer je $\vec{T}$ enotski vektor v smeri tangente na krivuljo, $\vec{N}$ normalni vektor, $\vec{B}$ pa binormalni vektor. Vektorja $\vec{T}$ in $\vec{B}$ določata pritisnjeno ravnino, ki se v dani točki najbolj prilega krivulji. Frenetovo ogrodje lahko izračunamo s pomočjo formul:

$$\begin{aligned}
\vec{T} &= \vec{r}\,' = \frac{\dot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}}|},\\
\vec{N} &= \frac{\vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|} = \frac{\dot{\vec{r}} \times (\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}}|\,|\ddot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}|} = \vec{B} \times \vec{T},\\
\vec{B} &= \frac{\vec{r}\,' \times \vec{r}\,''}{|\vec{r}\,''|} = \frac{\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}.
\end{aligned}$$

Za izračun Frenetovega ogrodja v točki $\vec{r}(0)$ bomo upoštevali, da velja $\dot{\vec{r}} = (\cos t, \operatorname{sh} t, -\sin t)$ in $\ddot{\vec{r}} = (-\sin t, \operatorname{ch} t, -\cos t)$. Ko vstavimo $t = 0$, dobimo $\dot{\vec{r}}(0) = (1, 0, 0)$, $\ddot{\vec{r}}(0) = (0, 1, -1)$, $\dot{\vec{r}}(0) \times \ddot{\vec{r}}(0) = (0, 1, 1)$ in še Frenetovo ogrodje:

$$\begin{aligned}
\vec{T}(0) &= (1, 0, 0),\\
\vec{N}(0) &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\\
\vec{B}(0) &= \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).
\end{aligned}$$

Ukrivljenost prostorske krivulje lahko izračunamo z uporabo formule

$$\kappa = \frac{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|}{|\dot{\vec{r}}|^3}.$$

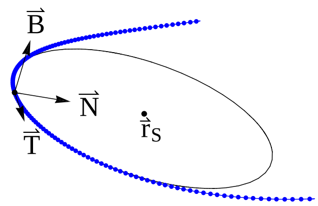
V točki $t = 0$ tako dobimo

$$\kappa(0) = \frac{|(0, 1, 1)|}{|(1, 0, 0)\,|^3} = \sqrt{2}.$$

(c) Polmer pritisnjene krožnice na krivuljo v točki $\vec{r}(0)$ je enak $R = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, njeno središče pa je v točki

$$\vec{r}_S = \vec{r}(0) + R\vec{N}(0) = (0, 1, 1) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(0, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

Poglejmo še skico krivulje in ostalih izračunanih količin.



□

(5) Dana je krivulja $\vec{r}(t) = (2t+1, 3t^2-1, t^2+t+1)$. Pokaži, da je krivulja ravninska in izračunaj enačbo ravnine, v kateri krivulja leži.

Rešitev: Krivulja z neničelno ukrivljenostjo je ravninska natanko takrat, ko ima ničelno torzijo. Torzijo krivulje izračunamo s pomočjo formul

$$\tau = \frac{(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dddot{\vec{r}})}{|\dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}}|^2} = \frac{(\vec{r}\,', \vec{r}\,'', \vec{r}\,''')}{|\vec{r}\,''|^2}.$$

Za dano krivuljo je:

$$\begin{aligned}
\dot{\vec{r}} &= (2, 6t, 2t+1), \\
\ddot{\vec{r}} &= (0, 6, 2), \\
\dddot{\vec{r}} &= (0, 0, 0),
\end{aligned}$$

od koder sledi $\tau = 0$.

Ker je krivulja ravninska, ima binormala konstantno smer, ki kaže v smeri normale na ravnino krivulje. Binormala kaže v smeri vektorja $\vec{n} = \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} = (-6, -4, 12)$, za izhodiščno točko ravnine pa lahko izberemo poljubno točko na krivulji. Tako dobimo enačbo ravnine

$$-3x - 2y + 6z = 5,$$

ki vsebuje krivuljo. □