Analiza 2
Rešitve 7. sklopa nalog

Številske vrste

(1) Razišči konvergenco vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$.

Rešitev: Številska vrsta je zaporedje števil (a_n), ki ga zapišemo kot formalno vsoto

$$\sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

Za poljubno vrsto lahko definiramo zaporedje delnih vsot

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

in rečemo, da vrsta $\sum a_n$ konvergira, če konvergira zaporedje njenih delnih vsot. Vsota vrste je definirana s predpisom

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_{n\to\infty} (s_n).$$

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$:

Velja

$$s_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Od tod sledi

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 1.$$

Opomba: Za izračun vsote poljubne geometrijske vrste lahko uporabimo formulo

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots = \frac{a}{1-q},$$

ki velja za vse $|q| < 1$.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$:

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja enakost

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Torej je

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n} = \lim_{n\to\infty} (s_n) = 1.$$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$:

Potreben pogoj za konvergenco vrste je, da konvergirajo njeni členi proti 0. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1,$$

od tod sklepamo, da vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ divergira. $\square$

(2) Razišči konvergenco vrst s pomočjo integralskega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Integralski kriterij: Naj bo $f : [k, \infty) \to \mathbb{R}$ zvezna, pozitivna in monotono padajoča funkcija. Potem velja:

$$\text{Vrsta} \sum_{n=k}^{\infty} f(n) \text{ konvergira} \iff \text{Integral} \int_k^{\infty} f(x)\, dx \text{ konvergira.}$$

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$:

Naj bo $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$. Za $\alpha \neq 1$ od tod sledi

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_1^{\infty}.$$

Limita $\lim_{x\to\infty} x^{1-\alpha}$ je končna natanko takrat, ko je $\alpha > 1$. Za $\alpha < 1$ pa je neskončna. Pri $\alpha = 1$ dobimo harmonično vrsto, ki prav tako divergira

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^{\infty} = \infty.$$

(b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$:

Definirajmo $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Potem je

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} \overset{\ln x = t}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t} = \infty.$$

Vrsta $\sum \frac{1}{n \ln n}$ torej divergira.

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$:

Tokrat naj bo $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$. Sledi

$$\int_2^{\infty} f(x)\,dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} \overset{\ln x = t}{=} \int_{\ln 2}^{\infty} \frac{dt}{t^2} < \infty$$

Od tod sklepamo, da vrsta $\sum \frac{1}{n \ln^2 n}$ konvergira. $\square$

(3) Razišči konvergenco vrst s pomočjo primerjalnega kriterija:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:

Primerjalni kriterij: Naj bosta $\sum a_n$ in $\sum b_n$ vrsti s pozitivnimi členi in naj velja $a_n \leq b_n$ za vse n od nekod dalje.

· Če je vrsta $\sum b_n$ konvergentna, je tudi vrsta $\sum a_n$ konvergentna.

· Če je vrsta $\sum a_n$ divergentna, je tudi vrsta $\sum b_n$ divergentna.

Tipično vrste primerjamo z vrstami oblike $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ ali pa z geometrijskimi vrstami.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$:

Uporabimo oceno

$$\frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n^3}}.$$

Torej je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n+1}} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Ker je $\frac{3}{2} > 1$, vrsta $\sum \frac{1}{\sqrt{n^3}}$ konvergira, zato po primerjalnem kriteriju sledi, da tudi vrsta $\sum \frac{1}{n\sqrt{n+1}}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n}$:

Uporabili bomo neenakost $\sin x < x$, ki velja za vse $x > 0$. Sledi

$$2^n \sin \frac{1}{3^n} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Velja torej $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} < \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Geometrijska vrsta na desni konvergira, zato je tudi vrsta $\sum 2^n \sin \frac{1}{3^n}$ konvergentna. □

(4) Razišči konvergenco vrst s pomočjo kvocientnega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:
<u>Kvocientni kriterij:</u> Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

· Če je $L < 1$, je vrsta konvergentna.
· Če je $L > 1$, je vrsta divergentna.
· Če je $L = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$:

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Ker je $L = \frac{1}{e} < 1$, vrsta $\sum \frac{n!}{n^n}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^n (2n)!}{(3n)!}$:

Tokrat imamo

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)^{n+1}(2n+2)!}{(3n+3)!}}{\frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+2)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n (2n+2)(2n+1)}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)} = \frac{8e}{27} < 1,$$

kar pomeni, da vrsta $\sum \frac{(2n)^n(2n)!}{(3n)!}$ konvergira. □

(5) Razišči konvergenco vrst s pomočjo korenskega kriterija:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$.

Rešitev: Pri tej nalogi bomo uporabili:
<u>Korenski kriterij:</u> Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja $L = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

· Če je $L < 1$, je vrsta konvergentna.
· Če je $L > 1$, je vrsta divergentna.
· Če je $L = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$:

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{4}{n+2}\right)^{n+1} = e^{-4}.$$

Ker je $e^{-4} < 1$, vrsta $\sum \left(\frac{n-2}{n+2}\right)^{n(n+1)}$ konvergira.

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$:

Tokrat je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vrsta $\sum \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$ torej konvergira. Pri tem smo upoštevali, da velja

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2} = 1.$$

□