Analiza 2
Rešitve 8. sklopa nalog

Številske vrste

(6) Razišči konvergenco vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ za $a > 0$.

Rešitev: Z uporabo kvocientnega ali pa korenskega kriterija bi dobili

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1,$$

kar nam nič ne pove o konvergenci vrste. V takšnih primerih nam včasih pomaga:
Raabejev kriterij: Naj bo $\sum a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in naj obstaja

$$L = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

· Če je $L > 1$, je vrsta konvergentna.
· Če je $L < 1$, je vrsta divergentna.
· Če je $L = 1$, je vrsta ali konvergentna ali divergentna.

Računajmo

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\frac{n!}{(a+1)\cdots(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)\cdots(a+n+1)}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a+n+1}{a+n} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{an}{a+n} = a.$$

Po Raabejevem kriteriju sledi, da je vrsta $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ konvergentna za $a > 1$ in divergentna za $a < 1$. Pri $a = 1$ dobimo harmonično vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(1+1)(1+2)\cdots(1+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n},$$

ki divergira.

Opomba 1: Pri $a = 2$ dobimo konvergentno vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2+1)(2+2)\cdots(2+n)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

S primerjalnim kriterijem lahko potem dokažemo, da vrsta $\sum \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ konvergira za $a \geq 2$, divergira pa za $a \leq 1$. Za $1 < a < 2$ pa je konvergenco vrste težko dokazati brez uporabe Raabejevega kriterija.

Opomba 2: S pomočjo Raabejevega kriterija lahko dokažemo, da vrsta $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$.

Opomba 3: Če izračunamo $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, avtomatično sledi $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$. $\square$

(7) Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo absolutno oziroma pogojno:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$, za $\alpha > 0$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$,

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$, za $a > 0$.

Rešitev: Za vrsto $\sum a_n$ z ne nujno pozitivnimi členi rečemo, da:

· konvergira absolutno, če konvergira vrsta $\sum |a_n|$,

· konvergira pogojno, če konvergira, a ne konvergira absolutno.

Alternirajoča vrsta je vrsta oblike $\sum (-1)^{n-1} a_n$ ali pa $\sum (-1)^n a_n$, kjer je $a_n \geq 0$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Za alternirajoče vrste lahko pogosto uporabimo:

Leibnizev kriterij: Če absolutne vrednosti

$$a_1 > a_2 > a_3 > \cdots$$

členov alternirajoče vrste monotono padajo proti nič, je vrsta konvergentna.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$:

Vrsta je alternirajoča, zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$1, \frac{1}{2^\alpha}, \frac{1}{3^\alpha}, \frac{1}{4^\alpha}, \ldots$$

pa monotono pada proti nič, saj je funkcija $f(x) = x^\alpha$ za $\alpha > 0$ naraščajoča, zvezna na $[0, \infty)$ in $f(0) = 0$. Sklepamo, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ konvergentna za vsak $\alpha > 0$.

Vemo že, da je vrsta $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ absolutno konvergentna natanko tedaj, ko je $\alpha > 1$. Za $0 < \alpha \leq 1$ je vrsta pogojno konvergentna.

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$:

Vrsta je alternirajoča. Zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\operatorname{tg} 1, \operatorname{tg} \frac{1}{2}, \operatorname{tg} \frac{1}{3}, \operatorname{tg} \frac{1}{4}, \ldots$$

monotono pada proti nič, saj je funkcija tg naraščajoča in zvezna na $[0, 1]$ ter $\operatorname{tg}(0) = 0$. Torej je vrsta $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ konvergentna.

Pokažimo sedaj, da vrsta ne konvergira absolutno. Za $x \in [0,1]$ velja ocena $\operatorname{tg} x \geq x$, od koder sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty.$$

Vrsta $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ je torej pogojno konvergentna.

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$:

Vrsta je alternirajoča. Zaporedje absolutnih vrednosti členov vrste

$$\frac{1}{2a}, \frac{1}{3a^2}, \frac{1}{4a^3}, \frac{1}{5a^4}, \ldots$$

monotono pada proti nič, če je $a \geq 1$. V primeru $a < 1$ pa členi zaporedja $|a_n|$ rastejo čez vse meje. Vrsta $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$ je torej konvergentna za $a \geq 1$ in divergentna za $a < 1$.

Vrsta $\sum \frac{1}{(n+1)a^n}$ konvergira, če je $a > 1$, pri $a = 1$ pa dobimo harmonično vrsto, ki divergira. Vrsta $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)a^n}$ je torej absolutno konvergentna za $a > 1$, pogojno konvergentna pri $a = 1$ ter divergentna za $a < 1$. □

(8) Koliko členov vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} + \ldots$$

moramo sešteti, da bo dobljen rezultat natančen na 0.01?

Rešitev: Vrsta $\sum \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ je alternirajoča, absolutne vrednosti njenih členov pa monotono padajo proti nič. Zato po Leibnizevem kriteriju konvergira. Označimo sedaj

$$S = s_k + r_k,$$

kjer je S vsota vrste, s_k vsota prvih k-členov vrste in

$$r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

napaka pri aproksimaciji vsote vrste z vsoto prvih k-členov vrste. Za vrste, ki zadoščajo Leibnizevemu kriteriju, lahko ocenimo napako. Velja namreč

$$|r_k| < |a_{k+1}|.$$

Če izberemo $k = 9$, bo zato veljalo

$$|a_{10}| = \frac{1}{100} = 0.01.$$

Če hočemo torej vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ izračunati na 0.01 natančno, zadošča da seštejemo vsoto prvih 9 členov.

Opomba: Natančna vsota vrste je enaka

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} \approx 0.8225,$$

vsota prvih 9 členov pa je enaka

$$\sum_{n=1}^{9} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \approx 0.8280.$$

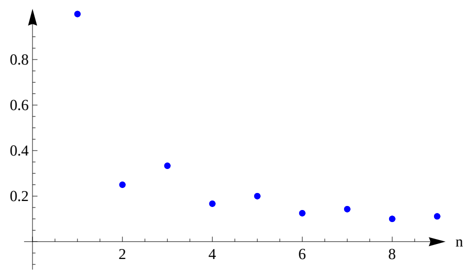
Vidimo, da je dejanska napaka približno pol manjša od naše ocene. $\square$

(9) Razišči konvergenco vrste $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$. Ali lahko uporabiš Leibnizev kriterij?

Rešitev: Računamo vsoto

$$1 - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{8} + \dots$$

Vrsta je alternirajoča, vendar pa absolutne vrednosti njenih členov ne padajo monotono proti nič, zato Leibnizevega kriterija ne moremo uporabiti.



Pokazali bomo, da vrsta kljub temu konvergira. Razdelimo vrsto tako, da vzamemo skupaj po dva zaporedna člena. Za $n = 2k$ tako dobimo

$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+2} = \frac{3}{n^2+n-2},$$

kar pomeni, da je

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n} = \sum_{n \text{ sod}} \frac{3}{n^2+n-2}.$$

Ker vrsta na desni konvergira, tudi naša vrsta konvergira.

Opomba: Dana vrsta je zelo podobna vrsti

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \dots = \ln 2.$$

Iz te vrste dobimo našo vrsto tako, da ji prištejemo $\frac{1}{2}$ in nato zamenjamo po parih dva zaporedna člena. S tem smo naredili na členih vrste neko neskončno permutacijo. Če bi bila vrsta absolutno konvergentna, je vsota vrste neodvisna od vrstnega reda, pri pogojno konvergentnih vrstah pa lahko z zamenjavo vrstnega reda dobimo poljubno vsoto, zato moramo biti pazljivi. Ker je v našem primeru ta neskončna permutacija kljub temu precej preprosta, lahko pokažemo, da velja

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-(-1)^n} = \ln 2 + \tfrac{1}{2}.$$

$\square$

Potenčne vrste in Taylorjeva vrsta

(1) Izračunaj konvergenčni polmer in območje konvergence naslednjih potenčnih vrst:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{4^n n}$.

Rešitev: Funkcijska vrsta oblike

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$$

se imenuje *potenčna vrsta* s središčem v a. Za vsako potenčno vrsto obstaja število $R \geq 0$, ki mu rečemo *konvergenčni polmer* vrste, da velja:

(a) Vrsta konvergira za $x \in (a-R, a+R)$, divergira za $|x-a| > R$, v točkah $|x-a| = R$ pa lahko ali konvergira ali pa divergira.

(b) Vrsta konvergira absolutno in enakomerno na $[a-r, a+r]$ za vsak $r \in R$.

(c) Vsota vrste je analitična funkcija na $(a-R, a+R)$. Če vrsta konvergira v kakšnem izmed krajišč, je tudi tam zvezna po Abelovem izreku.

Konvergenčni polmer potenčne vrste lahko izračunamo s pomočjo naslednjih formul:

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|,$$

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|},$$

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}.$$

(a) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$:

V tem primeru imamo potenčno vrsto s središčem v točki $a = 0$ in s koeficienti $a_n = n+1$. Sledi

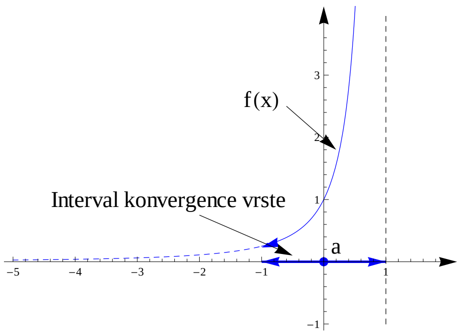
$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2} = 1.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu $I = (-1, 1)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = -1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(n+1) \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = -1$,

$\cdot\ x = 1 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 1$.

Opomba: Od tod sklepamo, da vsota vrste določa zvezno funkcijo na intervalu $(-1, 1)$. Da se pokazati, da vrsta na intervalu $(-1, 1)$ konvergira k funkciji $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$. V tem smislu je funkcija $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ razširitev vsote potenčne vrste na interval $(-1, 1)$, dana potenčna vrsta pa predstavlja razvoj te funkcije v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.



(b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^n}$:

Sedaj imamo potenčno vrsto s središčem v koordinatnem izhodišču in s koeficienti $a_n = \frac{1}{n^n}$. Sledi

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0.$$

V tem primeru je konvergenčni polmer vrste enak $R = \infty$, kar pomeni, da vrsta konvergira za vsa realna števila. Funkcijam, ki so enake vsoti kakšne potenčne vrste na celi realni osi, rečemo *cele* funkcije. Najbolj znani primeri takšnih funkcij so polinomi, eksponentne funkcije in pa sinus ter kosinus.

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{4^n n}$:

V tem primeru imamo opravka s potenčno vrsto, ki ima neskončno ničelnih koeficientov. Velja namreč $a_{2n} = \frac{1}{4^n n}$ in $a_{2n+1} = 0$. V takšnih primerih moramo ponavadi za izračun konvergenčnega polmera uporabiti bolj splošno formulo

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{1}{4^n n}} = \frac{1}{2} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{n}} = \frac{1}{2}.$$

Vidimo, da vrsta konvergira na intervalu $I = (-2, 2)$. V robnih točkah pa velja:

$$x = \pm 2 \rightsquigarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\pm 2)^{2n}}{4^n n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow \text{vrsta divergira pri } x = \pm 2.$$

$\square$