Analiza 2
Rešitve 9. sklopa nalog

Potenčne vrste in Taylorjeva vrsta

(2) Določi območje konvergence danih potenčnih vrst, nato pa še izračunaj njuni vsoti:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$.

Rešitev: Pri izračunu vsote potenčne vrste lahko uporabimo izrek, ki pravi, da lahko potenčne vrste členoma odvajamo in integriramo:

Naj bo R konvergenčni polmer potenčne vrste $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ in $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ njena vsota na $(a-R, a+R)$. Potem za $x \in (a-R, a+R)$ velja

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1},$$
$$\int_a^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}.$$

(a) Potenčna vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}$ ima središče v točki $a = 1$ in koeficiente $a_n = \frac{1}{n}$. Konvergenčni polmer vrste je enak

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1.$$

Vrsta torej konvergira na intervalu $I = (0, 2)$. Poglejmo še robni točki:

$\cdot\ x = 0 \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} < \infty \Rightarrow$ vrsta konvergira pri $x = 0$,

$\cdot\ x = 2 \rightsquigarrow \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \Rightarrow$ vrsta divergira pri $x = 2$.

Od tod sledi, da vsota vrste določa zvezno funkcijo na intervalu $[0, 2)$, ki je analitična v njegovi notranjosti.

Definirajmo sedaj funkcijo $f : [0, 2) \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{n}.$$

Z odvajanjem zgornje vrste dobimo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x-1)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = \frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2-x}.$$

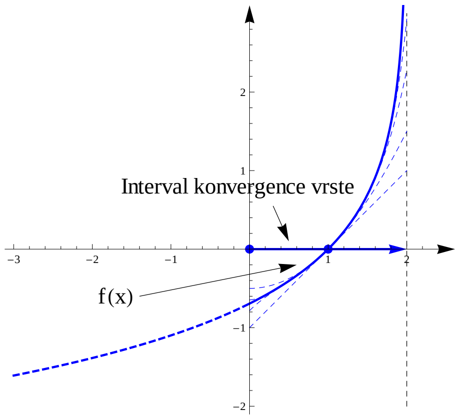
Pri tem smo uporabili formulo za vsoto geometrijske vrste. Z integriranjem sedaj dobimo

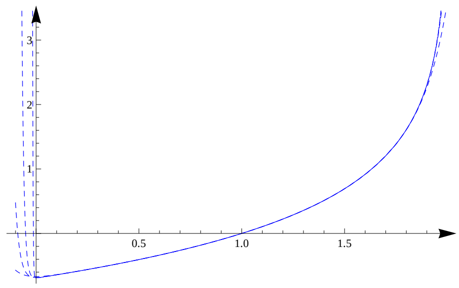
$$f(x) = -\ln(2-x) + C.$$

Vrednost konstante C lahko dobimo z izračunom funkcije f v kakšni točki. Najlažje je vzeti kar središče potenčne vrste. Pri $x = 1$ tako dobimo $f(1) = 0 = C$, od koder sledi

$$f(x) = -\ln(2-x).$$

Na levi sliki so narisani grafi vsote vrste, njene razširitve in pa aproksimacij vsote vrste s končnimi vsotami za $k \in \{1, 2, 5, 10\}$.





Zanimivo je pogledati, kaj se zgodi s končnimi aproksimacijami, če pogledamo vrednosti, ki so malce manjše od nič. Na desni sliki so prikazane aproksimacije za $k \in \{20, 50, 100, 500\}$. Opazimo lahko, da na intervalu $[0, 2)$ aproksimacije konvergirajo k funkciji f. Kakor hitro pa je $x < 0$, pa začne vsota vrste rasti čez vse meje.

(b) Konvergenčni polmer vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}$ je enak

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n+1}{(n+2)!}}{\frac{n+2}{(n+3)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)!}{(n+2)(n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n+2} = \infty,$$

kar pomeni, da vrsta konvergira za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če definiramo funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kot vsoto potenčne vrste

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!},$$

je torej f cela funkcija. Če našo vrsto členoma integriramo, dobimo

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{x}(e^x - x - 1).$$

Z uporabo osnovnega izreka analize sedaj sledi

$$f(x) = \left(\int_0^x f(t)\,dt\right)' = \frac{(e^x-1)x - (e^x - x - 1)}{x^2} = \frac{e^x x - e^x + 1}{x^2}.$$

$\square$

(3) Določi območje konvergence in izračunaj vsoto potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1},$$

nato pa še vsoto vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$$

Rešitev: Naj bo

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots$$

Iz formule

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = 1$$

sklepamo, da je konvergenčni polmer vrste enak $R = 1$. Vrsta konvergira tudi pri $x = \pm 1$, od koder sledi, da je $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija. Ker lahko potenčne vrste členoma odvajamo, je

$$f'(x) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2}.$$

Z integriranjem dobimo

$$f(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\, dx = \operatorname{arc\,tg} x + C.$$

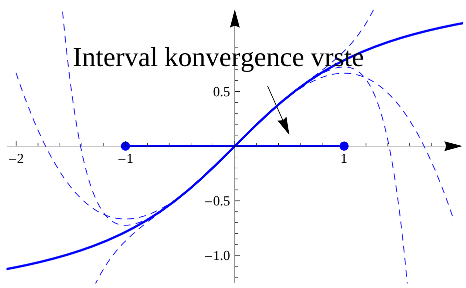
Konstanto C določimo z izračunom v neki točki, ki je ponavadi kar središče potenčne vrste. Dobimo $0 = f(0) = \operatorname{arc\,tg} 0 + C$, kar nam da $C = 0$. Posredno smo tako izračunali Taylorjevo vrsto funkcije arc tg v okolici točke $x = 0$

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots,$$

ki konvergira za $|x| \leq 1$. Če izberemo $x = 1$, pa dobimo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots = \operatorname{arc\,tg} 1 = \underline{\underline{\frac{\pi}{4}}}.$$

Poglejmo še graf funkcije arc tg in pa nekaj končnih aproksimacij s Taylorjevimi polinomi.



Opomba: Teorija potenčnih vrst nam med drugim pomaga izračunati tudi vsote nekaterih zanimivih številskih vrst. Glavno idejo lahko strnemo v naslednjih nekaj korakov:

· Poišči potenčno vrsto, katere izračun v neki točki sovpada z dano številsko vrsto.

· Izračunaj vsoto potenčne vrste v poljubni točki.

· Vstavi v izraz za vsoto potenčne vrste ustrezno vrednost.

$\square$

(4) Razvij dani funkciji v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$:

(a) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$,

(b) $f(x) = \dfrac{1}{2-3x+x^2}$.

Rešitev: Naj bo f gladka funkcija na neki okolici $(a-\delta, a+\delta)$ točke a. *Taylorjeva vrsta* funkcije f glede na točko a je potenčna vrsta

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots$$

Če Taylorjeva vrsta konvergira k funkciji f na $(a-\delta, a+\delta)$, rečemo, da je f *analitična* funkcija na $(a-\delta, a+\delta)$. Omeniti velja, da se lahko zgodi, da Taylorjeva vrsta dane funkcije konvergira k neki drugi funkciji. Osnovni primeri Taylorjevih vrst so:

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots, && x \in \mathbb{R},\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, && x \in \mathbb{R},\\
e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots, && x \in \mathbb{R},\\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots, && |x| < 1,\\
(1+x)^\alpha &= 1 + \binom{\alpha}{1}x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \cdots, && |x| < 1,\ \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Za poljubno realno število α je posplošeni binomski simbol definiran s predpisom

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Pri $\alpha = -1$ tako dobimo:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+x} &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots\\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots
\end{aligned}$$

(a) Za razvoj funkcije v Taylorjevo vrsto v okolici dane točke moramo izračunati vrednosti vseh odvodov funkcije v tej točki. V splošnem je računanje odvodov težko in zamudno, včasih pa si lahko delo olajšamo, če znamo dano funkcijo zapisati kot produkt funkcij, katerih Taylorjeve vrste že poznamo. V našem primeru je:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\ln(1+x)}{1+x}, \\
&= \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + \cdots\right), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}
$$

Števila a_n dobimo s konvolucijskim produktom obeh vrst:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= 0, \\
a_1 &= 1, \\
a_2 &= -\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\
a_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3},
\end{aligned}
$$

za splošni člen pa velja

$$
a_n = (-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right).
$$

Torej je

$$
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right)x^n = x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{6}x^3 + \cdots
$$

(b) V tem primeru je:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2 - 3x + x^2} = \frac{1}{(2-x)(1-x)} = \frac{1}{2}\frac{1}{(1-\frac{x}{2})(1-x)}, \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} + \cdots\right)\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\right), \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.
\end{aligned}
$$

Števila a_n dobimo s konvolucijskim produktom obeh vrst:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2}, \\
a_1 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right), \\
a_2 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right), \\
a_3 &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}\right),
\end{aligned}
$$

za splošni člen pa velja

$$a_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) = \frac{1}{2}\frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Taylorjeva vrsta funkcije f glede na točko $x = 0$ je torej

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x + \frac{7}{8}x^2 + \frac{15}{16}x^3 + \cdots$$

□

(5) Dana je funkcija $f(x) = \frac{1}{(1-x)^k}$, kjer je k naravno število. Pokaži, da je razvoj funkcije f v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$ enak

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n.$$

Rešitev: Pri razvoju funkcije f v Taylorjevo vrsto si bomo pomagali z binomsko formulo:

$$\begin{aligned} f(x) = (1-x)^{-k} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-k}{n}(-x)^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{-k(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!}(-1)^n x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!}x^n, \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{k+n-1}{n}x^n. \end{aligned}$$

□

(6) Razvij funkcijo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

v Taylorjevo vrsto okoli točke $a = 0$.

Rešitev: V verjetnosti, statistiki, fiziki, računalništvu in drugod je pomembna standardna normalna porazdelitev z verjetnostno gostoto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Je ena izmed funkcij, katere nedoločeni integral ni elementarna funkcija. Njen nedoločeni integral ponavadi označimo s Φ, omogoča pa nam, da računamo verjetnosti, da normalno porazdeljena slučajna spremenljivka zavzame vrednosti na določenem intervalu.

Funkcijo Φ lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto, ki konvergira na celi realni osi. Pri tem bomo uporabili dejstvo, da lahko potenčne vrste členoma integriramo. Uporabili bomo formulo

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!},$$

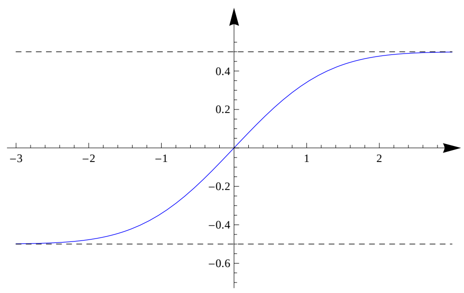
od koder sledi

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^n n!}\, dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!}.$$

Če izračunamo prvih nekaj členov, dobimo

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{40} - \frac{x^7}{336} + \cdots \right).$$

Funkcija Φ je omejena in ima vodoravni asimptoti $y = \pm 0.5$.



$\square$