

Analiza 2

10. sklop nalog

Funkcijska zaporedja in vrste

- (1) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = n(1-x)x^n$.
- (a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
 - (b) Ali zaporedje funkcij (f_n) konvergira enakomerno na $[0, 1]$ k funkciji f ?
- (2) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.
- (a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.
 - (b) Ali velja $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \int_0^1 f(x) dx$?
- (3) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.
- (a) Pokaži, da zaporedje (f_n) enakomerno konvergira na \mathbb{R} k neki funkciji f .
 - (b) Ali velja $f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?
- (4) Dana je funkcijska vrsta
- $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$
- (a) Pokaži, da vrsta enakomerno konvergira na $[0, \infty)$.
 - (b) Izračunaj vsoto funkcijske vrste.
- (5) Dano je zaporedje funkcij $f_n : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.
- (a) Izračunaj vsoto vrste $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$.
 - (b) Pokaži, da vrsta ne konvergira enakomerno na $(0, \infty)$.