Analiza 2
Rešitve 10. sklopa nalog

Funkcijska zaporedja in vrste

(1) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = n(1-x)x^n$.

(a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Ali zaporedje funkcij (f_n) konvergira enakomerno na $[0,1]$ k funkciji f?

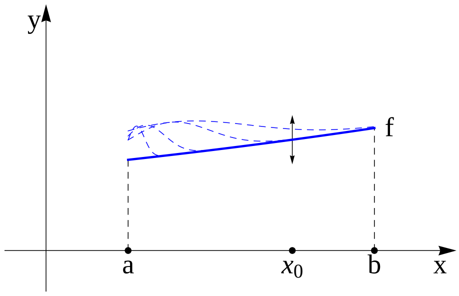
Rešitev: Pri študiju zaporedij realnih oziroma kompleksnih števil imamo na razpolago bolj ali manj eno samo smiselno definicijo pojma konvergence zaporedja. Pri funkcijah pa lahko, odvisno od uporabe, definiramo več med sabo neekvivalentnih načinov konvergence. Tukaj bomo spoznali dva izmed njih. Naj bodo funkcije (f_n) in f definirane na nekem intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Potem:

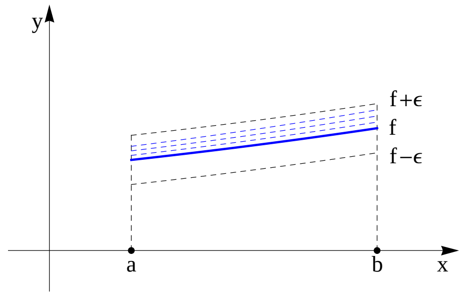
(a) Zaporedje (f_n) konvergira k f *po točkah* na I, če je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ za vsak $x \in I$.

(b) Zaporedje (f_n) konvergira k f *enakomerno* na I, če za vsak $\epsilon > 0$ obstaja tak N, da za vsak $n \geq N$ in za vsak $x \in I$ velja $|f(x) - f_n(x)| < \epsilon$.

Konvergenca po točkah pomeni, da v izbrani točki $x_0 \in I$ in pri dani natančnosti ϵ funkcijo f dovolj dobro aproksimirajo vsi f_n od nekega N dalje.

Enakomerna konvergenca pa pomeni, da pri izbrani natančnosti ϵ funkcijo f dovolj dobro aproksimirajo vse funkcije f_n od nekod dalje na celem intervalu I. To pomeni, da lahko izberemo tak N, ki je hkrati dober za vse $x \in I$. Enakomerna konvergenca torej implicira konvergenco po točkah, obratno pa ni vedno res.





Pri računanju si pomagamo z naslednjo ekvivalentno definicijo enakomerne konvergence. Ekvivalentno je namreč zahtevati, da zaporedje $c_n = \sup_{x\in I} |f(x) - f_n(x)|$ konvergira k 0.

(a) Izberimo $x \in [0,1]$.

$\cdot\, x \in \{0,1\} \Rightarrow f_n(x) = 0$ za vsak $n \Rightarrow f(x) = 0$,

$\cdot\, x \in (0,1) \Rightarrow f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} n(1-x)x^n = (1-x)\lim_{n\to\infty} nx^n = 0.$

Zaporedje (f_n) torej po točkah konvergira k funkciji

$$f(x) = 0.$$

(b) Poglejmo sedaj razliko med posameznimi funkcijami in pa limitno funkcijo. Upoštevali bomo, da nas zanimajo samo $x \in [0, 1]$.

$$|f(x) - f_n(x)| = |f_n(x)| = |n(1-x)x^n| = n(1-x)x^n.$$

Ker so vse funkcije zvezne, interval pa je končen in zaprt, lahko supremum zamenjamo z maksimumom. Sledi

$$c_n = \sup_{x \in [0,1]} |f(x) - f_n(x)| = \max_{x \in [0,1]} f_n(x).$$

Iščemo torej maksimume funkcij f_n na intervalu $[0, 1]$. Računajmo

$$f_n'(x) = -nx^n + n^2(1-x)x^{n-1} = nx^{n-1}\left(n(1-x) - x\right) = nx^{n-1}\left(n - (n+1)x\right).$$

Ničle odvodov so v $x_0 = 0$, kjer imajo funkcije minimume, in pa v točkah $x_n = \frac{n}{n+1}$, kjer imajo funkcije maksimume. Sledi

$$c_n = f_n(x_n) = n\left(1 - \frac{n}{n+1}\right)\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = n \cdot \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Limita zaporedja (c_n) je enaka

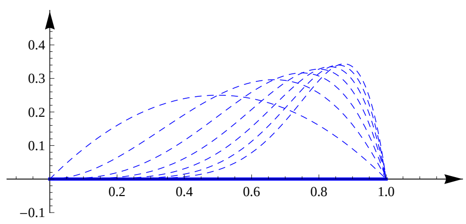
$$\lim_{n\to\infty}(c_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{e}.$$

Pri majhnih ϵ-ih bo torej za dovolj velike n veljalo

$$\max_{x\in[0,1]} f_n(x) > \epsilon,$$

kar pomeni, da konvergenca ni enakomerna.

Na sliki vidimo, da gredo za vsak $x \in [0, 1]$ vrednosti $f_n(x)$ proti 0 pri $n \to \infty$, vendar pa se grafi funkcij f_n po obliki bistveno razlikujejo od grafa funkcije f.



□

(2) Dano je zaporedje funkcij $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = 2nxe^{-nx^2}$.

(a) Določi limitno funkcijo $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

(b) Ali velja $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$?

Rešitev: (a) Izberimo $x \in [0,1]$.

$\cdot\ x = 0 \Rightarrow f_n(x) = 0$ za vsak $n \Rightarrow f(x) = 0$,

$\cdot\ x \in (0,1] \Rightarrow f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty} 2nxe^{-nx^2} = 2x \lim\limits_{n\to\infty} ne^{-nx^2} = 0.$

Zaporedje (f_n) tudi tokrat po točkah konvergira k funkciji

$$f(x) = 0.$$

(b) Računajmo

$$\int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 2nxe^{-nx^2}\, dx \overset{nx^2=t}{=} \int_0^n e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^n = 1 - e^{-n}.$$

Torej je

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} (1 - e^{-n}) = 1.$$

Po drugi strani pa je $\int_0^1 f(x)\, dx = 0$, od koder sledi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \neq \int_0^1 f(x)\, dx.$$

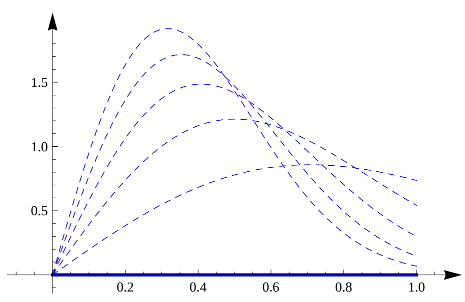
Opomba: Implicitno smo s tem pokazali, da zaporedje (f_n) ne konvergira enakomerno na intervalu $[0,1]$ k funkciji f. Za enakomerno konvergentna zaporedja velja namreč:

Izrek: Če zaporedje (f_n) enakomerno konvergira k funkciji f na intervalu $[a,b]$, je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)\, dx.$$

V praksi to pomeni, da lahko pri enakomerno konvergentnih zaporedjih zamenjamo vrstni red integriranja in pa računanja limite.

Prepričajmo se še grafično, da konvergenca ni enakomerna. Narisani so grafi prvih petih funkcij iz danega zaporedja. Maksimumi funkcij rastejo v tem primeru čez vse meje.



$\square$

(3) Dano je zaporedje funkcij $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$.

(a) Pokaži, da zaporedje (f_n) enakomerno konvergira na $\mathbb{R}$ k neki funkciji f.

(b) Ali velja $f'(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x)$ za vsak $x \in \mathbb{R}$?

Rešitev: (a) Izberimo $x \in \mathbb{R}$ in računajmo

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+nx^2} = 0.$$

Zaporedje (f_n) torej po točkah konvergira k funkciji $f(x) = 0$. Naj bo sedaj

$$c_n = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - f_n(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)|.$$

Ker je

$$\lim_{x\to\pm\infty} f_n(x) = 0$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$, in so funkcije f_n zvezne na $\mathbb{R}$, so omejene, zato moramo pravzaprav poiskati maksimume funkcij $|f_n|$ na $\mathbb{R}$. Računajmo

$$f_n'(x) = \frac{1+nx^2-2nx^2}{(1+nx^2)^2} = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}.$$

Ničle odvodov so v točkah $\pm\frac{1}{\sqrt{n}}$, kjer imajo funkcije f_n lokalne ekstreme. Vse funkcije so lihe, zato se lahko pri iskanju maksimuma funkcije $|f_n|$ omejimo na $x \geq 0$. Maksimum bo dosežen v točki $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Sledi

$$c_n = f_n(x_n) = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{2} = \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Limita vrednosti c_n pa je

$$\lim_{n\to\infty} (c_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\sqrt{n}} = 0,$$

kar pomeni, da zaporedje (f_n) konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$ k funkciji f.

(b) Izračunali smo že, da velja $f_n'(x) = \frac{1-nx^2}{(1+nx^2)^2}$. Od tod sledi

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = \begin{cases} 1 & ; x = 0, \\ 0 & ; x \neq 0. \end{cases}$$

Po drugi strani pa je $f'(x) = 0$ za vsak x. Od tod sklepamo, da enakost

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$$

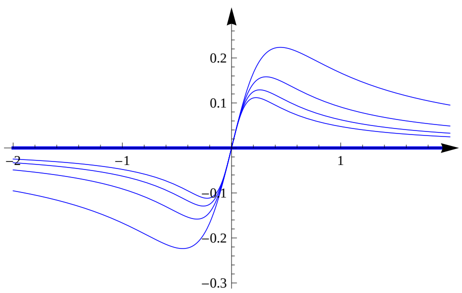
ne velja za vsak $x \in \mathbb{R}$, ampak le za $x \neq 0$.

<u>Opomba 1</u>: Videli smo, da kljub temu, da zaporedje (f_n) konvergira enakomerno na intervalu $\mathbb{R}$ k funkciji f, ne smemo zamenjati vrstnega reda odvajanja in pa računanja limite. Pogoji, kdaj to lahko naredimo, so v tem primeru malce ostrejši.

<u>Izrek</u>: Naj zaporedje (f_n) konvergira po točkah k funkciji f na intervalu $I \subset \mathbb{R}$. Če so vse funkcije f_n odvedljive in če zaporedje f_n' konvergira enakomerno na I, je funkcija f odvedljiva in velja

$$f'(x) = \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

<u>Opomba 2</u>: Poglejmo si še grafe funkcij f_n za $n \in \{5, 10, 15, 20\}$.



Ker zaporedje (f_n) konvergira enakomerno na $\mathbb{R}$ k ničelni funkciji, bodo grafi funkcij f_n poljubno blizu grafa funkcije f pri dovolj velikih n-jih. Vendar pa grafi vseh funkcij f_n sekajo abscisno os pod kotom $45°$, kar pomeni, da se po obliki precej razlikujejo od grafa ničelne funkcije.

Na splošno nam enakomerna konvergenca funkcij zagotavlja, da bomo lahko limitno funkcijo poljubno dobro aproksimirali. Če pa dodatno želimo še, da se bodo tudi oblike grafov funkcij prilegale grafu limitne funkcije, pa moramo dodatno zahtevati še enakomerno konvergenco prvih nekaj odvodov funkcij f_n. $\square$

(4) Dana je funkcijska vrsta
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}.$$

(a) Pokaži, da vrsta enakomerno konvergira na $[0, \infty)$.

(b) Izračunaj vsoto funkcijske vrste.

Rešitev: (a) Funkcijska vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ po definiciji konvergira enakomerno na intervalu $I \subset \mathbb{R}$ k vsoti f, če zaporedje delnih vsot
$$s_k = \sum_{n=0}^{k} f_n$$
konvergira enakomerno k funkciji f na intervalu I. Če so vsi členi vrste zvezne funkcije in je konvergenca enakomerna, je tudi vsota vrste zvezna funkcija. Pri določanju enakomerne konvergence vrst nam pogosto pomaga naslednji kriterij.

Weierstrassov kriterij za enakomerno konvergenco vrst:

Če za vsak n obstaja konstanta c_n, da je $\sup\limits_{x \in I} |f_n(x)| \leq c_n$ in vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ konvergira, potem vrsta $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ konvergira enakomerno na I.

V praksi ponavadi poskušamo absolutne vrednosti funkcij navzgor omejiti s pozitivnimi konstantami, ki se seštejejo v neko končno število.

V našem primeru je $I = [0, \infty)$ in $f_n(x) = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ za $n \geq 2$.

Poglejmo sedaj ocene
$$|f_n(x)| = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} \leq \frac{1}{(n-1)(n)} \leq \frac{1}{(n-1)^2}.$$

Če označimo $c_n = \frac{1}{(n-1)^2}$, je

$$\sum_{n=2}^{\infty} c_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Od tod po Weierstrassovem kriteriju sledi, da vrsta $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(x+n-1)(x+n)}$ enakomerno konvergira k neki zvezni funkciji $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$.

(b) V splošnem je to vse, kar lahko povemo o vsoti vrste. Vemo, da je zvezna funkcija, ki jo lahko poljubno dobro aproksimiramo z delnimi vsotami. V našem primeru pa lahko vsoto tudi eksplicitno izračunamo. Najprej opazimo, da velja

$$f_n(x) = \frac{1}{(x+n-1)(x+n)} = \frac{1}{x+n-1} - \frac{1}{x+n}.$$

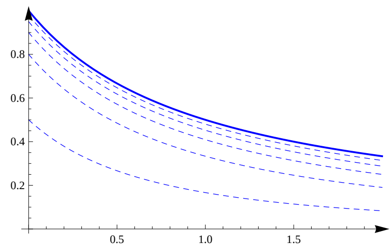
Od tod sledi

$$\begin{aligned} s_k(x) = \sum_{n=2}^{k} f_n(x) &= \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right) + \left(\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x+3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{x+k-1} - \frac{1}{x+k}\right), \\ &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+k} \end{aligned}$$

in

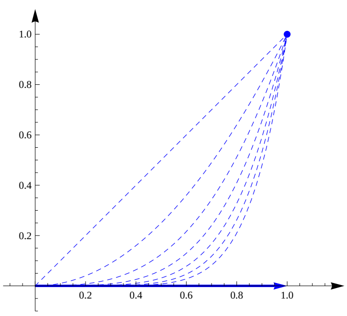
$$f(x) = \lim_{k\to\infty} s_k(x) = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+k}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{x+1}}}.$$

Poglejmo še grafe vsote in pa delnih vsot za $k \in \{2, 5, 10, 20, 50\}$.



Opomba: V primeru, ko konvergenca ni enakomerna, se lahko zgodi, da limitna funkcija ni zvezna. Tak primer je zaporedje funkcij $f_n(x) = x^n$, ki na intervalu $[0, 1]$ po točkah konvergira k funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ; x \in [0, 1), \\ 1 & ; x = 1. \end{cases}$$



□

(5) Dano je zaporedje funkcij $f_n : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, kjer je $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n}$.

(a) Izračunaj vsoto vrste $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

(b) Pokaži, da vrsta ne konvergira enakomerno na $(0, \infty)$.

Rešitev: (a) Pri izračunu vsote vrste si bomo pomagali s Taylorjevo vrsto

$$\ln(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(-t)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n},$$

ki konvergira za $|t| < 1$. Če pišemo $t = e^{-x}$, bo za $x > 0$ veljalo $t \in (0, 1)$, zato je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-x})^n}{n} = -\ln(1-t) = \underline{\underline{-\ln(1-e^{-x})}}.$$

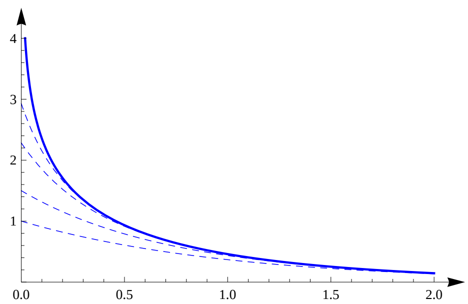
(b) Za dokaz enakomerne konvergence vrste na intervalu $(0, \infty)$ ne moremo uporabiti Weierstrassovega kriterija, saj je

$$\sup_{x \in (0,\infty)} |f_n(x)| = 1/n,$$

harmonična vrsta $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ pa divergira.

Vsota vrste je zvezna funkcija na intervalu $(0, \infty)$, ki pa je neomejena v okolici točke $x = 0$. Od tod sledi, da konvergenca ni enakomerna. Vse delne vsote vrste so namreč omejene funkcije na intervalu $(0, \infty)$, enakomerna limita omejenih funkcij pa ne more biti neomejena.

Na sliki so prikazani graf vsote in pa grafi delnih vsot za $k \in \{1, 2, 5, 10\}$.



□