# Analiza 2
# Rešitve 11. sklopa nalog

---

### Fourierova vrsta

(1) Razvij naslednji funkciji v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$:

(a) $f(x) = x$,

(b) $f(x) = |x|$.

*Rešitev:* Vsaki integrabilni funkciji $f$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ lahko priredimo Fourierovo vrsto

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)\right),$$

kjer so koeficienti določeni z integrali:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx)\, dx. \end{aligned}$$

Če je funkcija $f$ odvedljiva v točki $x$, potem vrsta $S(x)$ konvergira k $f(x)$. Če pa ima $f$ v točki $x$ limito levega in desnega odvoda ter levo in desno limito, pa vrsta $S(x)$ konvergira k povprečni vrednosti leve in desne limite funkcije $f$ v točki $x$.

(a) Funkcija $f(x) = x$ je liha, zato so vsi koeficienti $a_n$ enaki nič. Koeficienti pri sinusih pa so enaki:

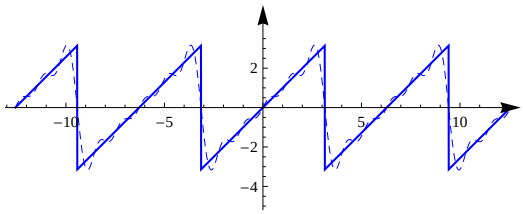
$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \left( -\frac{1}{n} x \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx)\, dx \right), \\ &= \frac{1}{\pi} \left( -\frac{2\pi}{n} \cos(n\pi) + \frac{1}{n^2} \sin(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} \right), \\ &= \underline{\underline{\frac{2(-1)^{n+1}}{n}}}. \end{aligned}$$

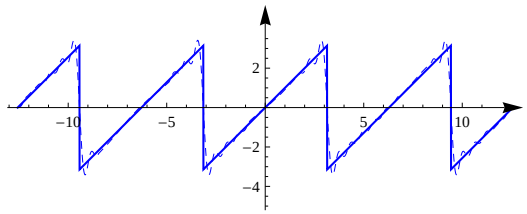
Ker je funkcija $f(x) = x$ odvedljiva, za vsak $x \in (-\pi, \pi)$ velja

$$x = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)}} = 2 \left( \sin x - \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{\sin(3x)}{3} - \frac{\sin(4x)}{4} + \cdots \right).$$

V robnih točkah intervala $(-\pi, \pi)$ Fourierova vrsta konvergira k povprečni vrednosti funkcije $f$ teh točkah, ki pa je enaka nič.

Zaradi oblike grafa $2\pi$-periodično razširitev funkcije $f(x) = x$ z intervala $(-\pi, \pi)$ na $\mathbb{R}$ ponavadi imenujemo žagasti val. Na sliki je prikazan graf periodične razširitve funkcije $f$ in pa aproksimaciji s končnima trigonometričnima polinomoma za $n = 5$ in $n = 10$.






Pri razvoju v Fourierovo vrsto dano funkcijo zapišemo kot vsoto harmoničnih funkcij z različnimi frekvencami (ki so vse celoštevilski večkratniki osnovne frekvence). Vsoto kosinusa in sinusa z isto frekvenco lahko zapišemo tudi v obliki

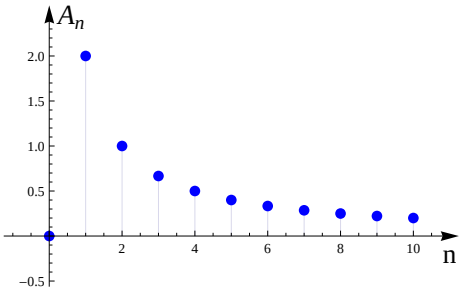
$$A_n \cos(nx - \delta_n) = a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

kjer je $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, medtem ko $\delta_n$ ustreza polarnemu kotu točke $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$. Če definiramo še $A_0 = \frac{a_0}{2}$, velja

$$S(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(nx - \delta_n).$$

Število $A_n$ interpretiramo kot amplitudo, število $\delta_n$ pa kot fazni zamik $n$-te harmonične komponente dane funkcije. Spekter periodične funkcije ponazorimo z grafom zaporedja $(A_n)$. Po Riemann-Lebesguovi lemi konvergira zaporedje $(A_n)$ proti nič, zato so pri analizi funkcij pomembne predvsem nizke frekvence.

Poglejmo si spekter žagastega vala.



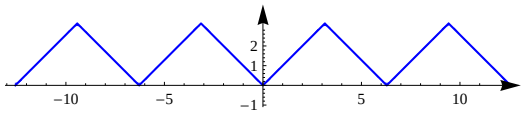

(b) Tokrat je funkcija $f(x) = |x|$ soda, zato so vsi koeficienti $b_n$ enaki nič. Računajmo:

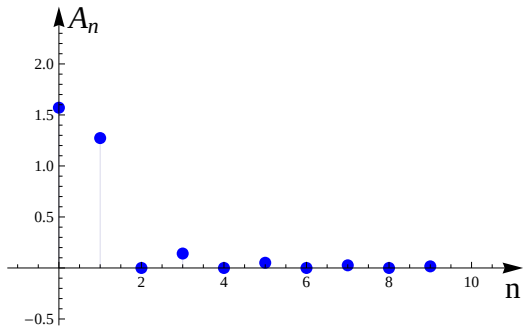
$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \underline{\underline{\pi}},\\
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,dx,\\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n}x\sin(nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin(nx)\,dx\right),\\
&= \frac{2}{n^2\pi}\cos(nx)\Big|_0^{\pi},\\
&= \underline{\underline{\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)}}.
\end{aligned}$$

Za vsak $x \in (-\pi, \pi)$ sedaj dobimo enakost

$$|x| = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n - 1\right)\cos(nx)}} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25} + \cdots\right).$$

Funkcija $f(x) = |x|$ sicer ni odvedljiva v točki $x = 0$, vendar pa ima tam levi in desni odvod, kar je še vedno zadostni pogoj za konvergenco. Ker je $f(-\pi) = f(\pi)$, enakost velja tudi v robnih točkah intervala. Poglejmo si še aproksimacijo periodične razširitve funkcije $f(x) = |x|$, ki ji rečemo trikotni val, s polinomom $S_5$ in pa spekter funkcije $f$:




Vidimo, da imamo tokrat zelo dobro aproksimacijo že za $n = 5$:

$$|x| \approx \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos(3x)}{9} + \frac{\cos(5x)}{25}\right).$$

Opomba: Podobno lahko razvijemo v Fourierovo vrsto tudi integrabilno funkcijo, ki je definirana na intervalu $[a, b]$. Če označimo $L = b - a$ in $\omega = \frac{2\pi}{L}$, je

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x)\right),$$

kjer so koeficienti določeni z integrali:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\cos(n\omega x)\,dx, \\ b_n &= \frac{2}{L}\int_a^b f(x)\sin(n\omega x)\,dx. \end{aligned}$$

□

(2) Dana je funkcija $f(x) = \begin{cases} 1 & ;\ 0 < x \leq \pi, \\ 0 & ;\ x = 0, \\ -1 & ;\ -\pi \leq x < 0. \end{cases}$

(a) Razvij funkcijo $f$ v kompleksno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

(b) Razvij funkcijo $f$ v realno obliko Fourierove vrste na intervalu $[-\pi, \pi]$.

*Rešitev:* Fourierovo vrsto funkcije $f$ na $[-\pi, \pi]$ lahko predstavimo v kompleksni obliki

$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

kjer je

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx.$$

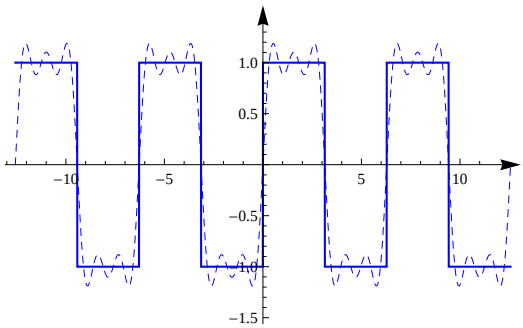
(a) Računajmo:

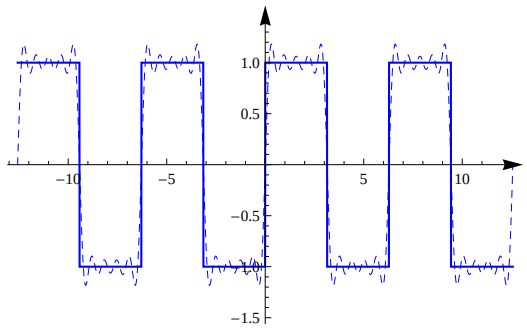
$$\begin{aligned}
c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \underline{\underline{0}},\\
c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\left(-\int_{-\pi}^{0} e^{-ikx}\,dx + \int_{0}^{\pi} e^{-ikx}\,dx\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ik}e^{-ikx}\Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{ik}e^{-ikx}\Big|_{0}^{\pi}\right),\\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{ik}(1-e^{ik\pi}) - \frac{1}{ik}(e^{-ik\pi}-1)\right),\\
&= \frac{1}{2\pi ik}\left(2-2(-1)^k\right),\\
&= \underline{\underline{\frac{i}{\pi k}((-1)^k-1)}}.
\end{aligned}$$

Torej za vsak $x \in (-\pi, \pi)$ velja

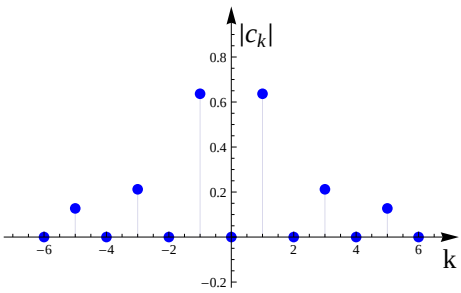
$$\underline{\underline{f(x) = \sum_{k\neq 0} \frac{i}{\pi k}((-1)^k-1)e^{ikx}}}.$$

Periodično razširitev funkcije $f$ na realna števila imenujemo kvadratni val. Poglejmo si aproksimaciji kvadratnega vala s trigonometričnima polinomoma za $n = 5$ in $n = 10$.




V kompleksni obliki predstavimo spekter periodične funkcije z grafom zaporedja $|c_k|$. Spekter realne funkcije je simetričen glede na ordinatno os, kvadratni val pa ima spekter naslednje oblike.



(b) Med koeficienti Fourierove vrste v realni in v kompleksni obliki veljajo naslednje zveze:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{2}, \\ c_n &= \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \\ a_n &= 2\,\mathrm{Re}(c_n), \\ b_n &= -2\,\mathrm{Im}(c_n), \end{aligned}$$

za $n > 0$. Od tod dobimo $a_0 = a_n = 0$, $b_n = \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)$ in

$$f(x) = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}(1 - (-1)^n)\sin(nx)}} = \frac{4}{\pi}\left(\sin x + \frac{\sin(3x)}{3} + \frac{\sin(5x)}{5} + \cdots\right).$$

□

(3) Dana je funkcija $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

(a) S pomočjo razvoja funkcije ch v Fourierovo vrsto pokaži, da za vsak $x \in [-\pi, \pi]$ velja

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1 + k^2} e^{ikx}.$$

(b) Izračunaj vsoto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + n^2}.$$

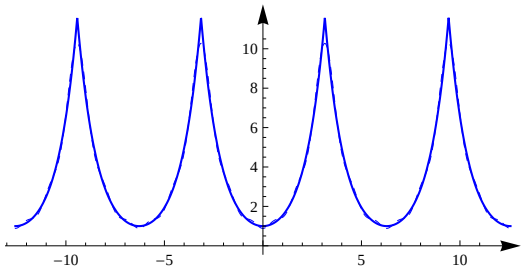
*Rešitev:* (a) Razvijmo najprej funkcijo ch v kompleksno obliko Fourierove vrste na $[-\pi, \pi]$:

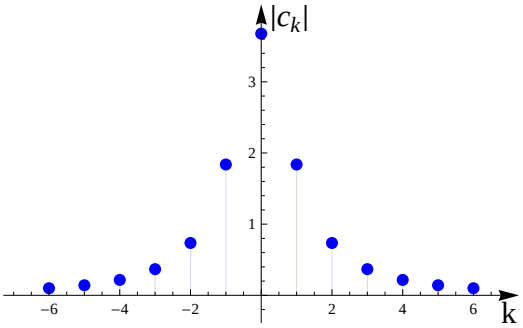
$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x\, dx = \frac{1}{2\pi}\operatorname{sh} x\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\operatorname{sh}\pi - \operatorname{sh}(-\pi)) = \underline{\underline{\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}}}, \\ c_k &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ch} x e^{-ikx}\, dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^{(1-ik)x} + e^{(-1-ik)x}\right) dx, \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{1-ik}e^{(1-ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{-1-ik}e^{(-1-ik)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}\right), \\ &= \frac{1}{4\pi}\left(\frac{(-1)^k}{1-ik}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right) + \frac{(-1)^k}{-1-ik}\left(e^{-\pi} - e^{\pi}\right)\right), \\ &= \frac{(-1)^k\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)}{4\pi}\left(\frac{1}{1-ik} + \frac{1}{1+ik}\right), \\ &= \frac{(-1)^k \operatorname{sh}\pi}{2\pi}\frac{2}{1+k^2}, \\ &= \underline{\underline{\frac{\operatorname{sh}\pi}{\pi}\frac{(-1)^k}{1+k^2}}}. \end{aligned}$$

Rezultat smo izrazili s hiperboličnim sinusom $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. Formula za splošen $k$ je veljavna tudi v primeru $k = 0$, zato je

$$\operatorname{ch} x = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2} e^{ikx}$$

za vse $x \in [-\pi, \pi]$. Za $x \in (-\pi, \pi)$ to sledi iz odvedljivosti funkcije ch, za robni točki pa iz dejstva, da je funkcija ch soda in ima na robovih limito in limito odvoda.




(b) Vstavimo $x = \pi$ v Fourierov razvoj. Dobimo

$$\operatorname{ch} \pi = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} = \frac{\operatorname{sh} \pi}{\pi} \left( 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right).$$

Od tod sledi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \underline{\underline{\frac{\pi \operatorname{cth} \pi - 1}{2}}}.$$

□

(4) Razvij naslednje funkcije v Fourierovo vrsto na intervalu $[-\pi, \pi]$:

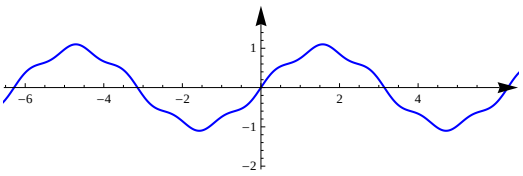
(a) $f(x) = \sin x + 0.1 \sin 5x$,

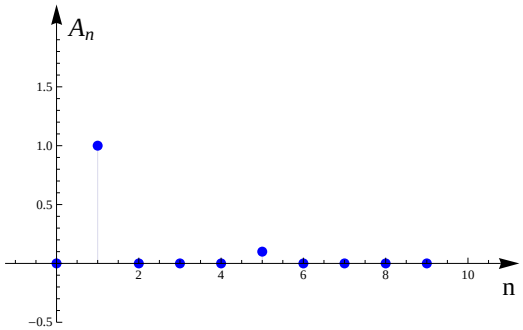
(b) $f(x) = \sin x \cos x$,

(c) $f(x) = \cos^2 x$.

*Rešitev:* Te funkcije lahko razvijemo v Fourierovo vrsto s pomočjo integracije kot pri ostalih primerih. Včasih pa je lahko koeficiente razvoja kar uganemo, če predpis za funkcijo zapišemo v ustrezni obliki.

(a) Funkcija $f(x) = \sin x + 0.1 \sin 5x$ je že razvita v Fourierovo vrsto, edina neničelna koeficienta pa sta $b_1 = 1$ in $b_5 = 0.1$.

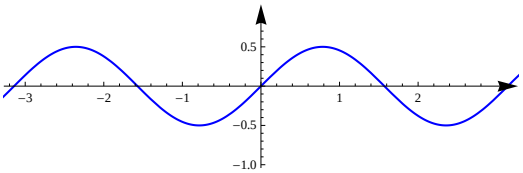


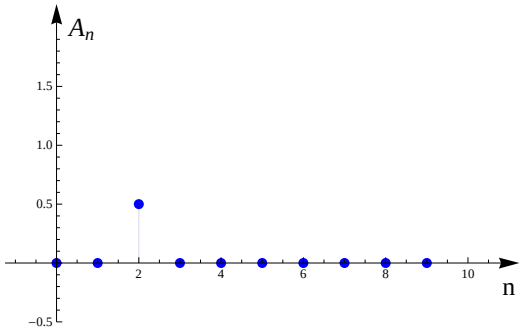



(b) Za razvoj funkcije $f(x) = \sin x \cos x$ bomo uporabili adicijski izrek za sinusno funkcijo

$$\sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Torej je $b_2 = \frac{1}{2}$ edini neničelni koeficient.

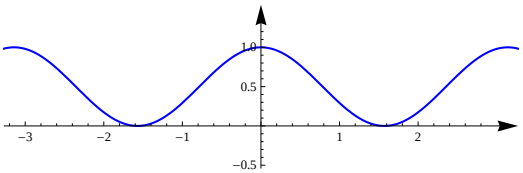


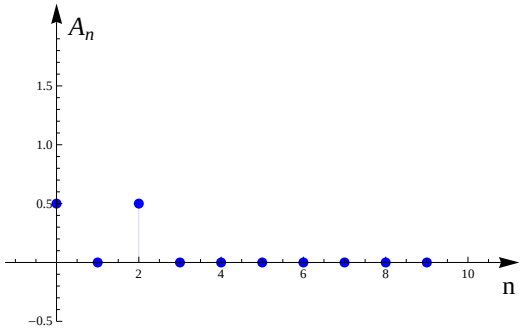




(c) Tokrat bomo uporabili adicijski izrek za kosinusno funkcijo

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x.$$

Torej je $a_0 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, ostali koeficienti pa so enaki 0.




□

(5) Dana je funkcija $f(x) = x^2$ na intervalu $[0, L]$ za nek $L > 0$. Razvij funkcijo $f$ v Fourierovo sinusno in kosinusno vrsto.

*Rešitev:* Naj bo $f$ integrabilna funkcija na intervalu $[0, L]$. Poleg običajnega razvoja funkcije $f$ po sinusih in kosinusih hkrati, lahko funkcijo $f$ razvijemo tudi samo po sinusih ali pa samo po kosinusih. Vendar pa moramo pri tem za osnovno frekvenco vzeti polovično vrednost osnovne frekvence pri običajni Fourierovi vrsti. Torej je $\omega = \frac{\pi}{L}$.

<u>Fourierova sinusna vrsta</u>:

- $S_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega x)$,
- $b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin(n\omega x)\, dx$.

Fourierova kosinusna vrsta:

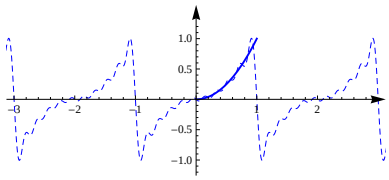
$$\cdot\ S_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x),$$

$$\cdot\ a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx,$$

$$\cdot\ a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\omega x)\,dx.$$

Če razvijamo po sinusih, lahko dobljeno vrsto smatramo kot liho periodično razširitev dane funkcije, če pa po kosinusih, pa kot sodo periodično razširitev.

Poglejmo najprej skico aproksimacije lihe periodične razširitve funkcije $f$ v primeru $L = 1$.



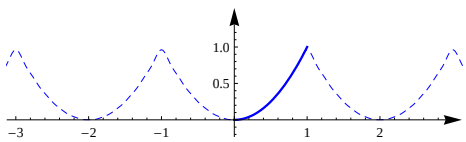

Koeficienti Fourierove sinusne vrste funkcije $f$ so

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x^2\sin(n\omega x)\,dx = \frac{2}{L}\left(-\frac{1}{n\omega}x^2\cos(n\omega x)\Big|_0^L + \frac{2}{n\omega}\int_0^L x\cos(n\omega x)\,dx\right),\\
&= \frac{2}{n\pi}\left(-L^2(-1)^n + 2\left(\frac{1}{n\omega}x\sin(n\omega x)\Big|_0^L - \frac{1}{n\omega}\int_0^L \sin(n\omega x)\,dx\right)\right),\\
&= \frac{2}{n\pi}\left(L^2(-1)^{n+1} - \frac{2}{n\omega}\int_0^L \sin(n\omega x)\,dx\right) = \frac{2}{n\pi}\left(L^2(-1)^{n+1} + \frac{2}{n^2\omega^2}\cos(n\omega x)\Big|_0^L\right),\\
&= \underline{\underline{\frac{2}{n\pi}\left(L^2(-1)^{n+1} + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\right)}}.
\end{aligned}$$

Sledi

$$S_s(x) = \underline{\underline{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(L^2(-1)^{n+1} + \frac{2L^2}{n^2\pi^2}\left((-1)^n - 1\right)\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}}.$$

Razvijmo sedaj funkcijo $f$ še v Fourierovo kosinusno vrsto



$$\cdot\, a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L x^2 = \underline{\underline{\frac{2}{3}L^2}},$$

$$\begin{aligned}
\cdot\, a_n &= \frac{2}{L}\int_0^L x^2\cos(n\omega x)\,dx = \frac{2}{L}\left(\frac{1}{n\omega}x^2\sin(n\omega x)\Big|_0^L - \frac{2}{n\omega}\int_0^L x\sin(n\omega x)\,dx\right),\\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{1}{n\omega}x\cos(n\omega x)\Big|_0^L + \frac{1}{n\omega}\int_0^L \cos(n\omega x)\,dx\right),\\
&= -\frac{4}{n\pi}\left(-\frac{L(-1)^n}{n\omega} + \frac{1}{n^2\omega^2}\sin(n\omega x)\Big|_0^L\right),\\
&= \underline{\underline{\frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}}}.
\end{aligned}$$

Tako dobimo Fourierovo kosinusno vrsto funkcije $f$

$$\underline{\underline{S_c(x) = \frac{L^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4L^2(-1)^n}{n^2\pi^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right).}}$$

$\square$