Drugi izpit - ANA3(IŠRM)

21.2.2011

1. Izračunaj integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - e^{-ax}}{xe^x} \mathrm{d}x, \quad a > -1.$$

Rešitev: Velja

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-ax-x} \mathrm{d}x = \frac{1}{1+a},$$

torej je $F(a) = \log(1+a) + C$. Če vstavimo $a = 0$ dobimo $C = 0$.

2. Reši diferencialni enačbi

a)

$$y' \sin x - y \cos x = \sin^3 x,$$

b)

$$y'' + 6y' + 9y = 16e^{-x} \cos 2x.$$

Rešitev: Prva enačba je linearna. Homogeni del dobimo z integracijo

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \int \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Rešitev homogenega dela $y_H(x) = C \sin x$ uporabimo v variaciji konstante in dobimo enačbo $C' = \sin^2 x$. Končna rešitev diferencialne enačbe je torej

$$y(x) = C \sin x + \frac{1}{4}(2x - \sin 2x) \sin x.$$

Druga enačba je linearna s konstantnimi koeficienti. Karakteristična enačba ima dvojno ničlo $\lambda_{1,2} = -3$, zato je $y_H(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 x e^{-3x}$. Z nastavkom $y_P(x) = e^{-x}(A \sin 2x + B \cos 2x)$ poiščemo partikularno rešitev. Ugotovimo, da je $A = 2$ in $B = 0$.

3. a) Skiciraj integracijsko območje in zamenjaj vrstni red integracije v integralu

$$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y) \mathrm{d}x.$$

b) Z uporabo cilindričnih koordinat izračunaj volumen telesa

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \leq 2z, x^2+y^2+z^2 \leq 8\right\}.$$

Rešitev:

$$\int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} f \mathrm{d}x =$$

$$= \int_{-2}^{-\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f \mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}}^{-\sqrt{2}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{2}} f \mathrm{d}y + \int_{\sqrt{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f \mathrm{d}y$$

Naj bodo (φ, r, z) cilindrične koordinate. Telo D je presek rotacijsko simetričnega telesa $z = r^2/2$ in sfere s središčem v izhodišču in polmerom $2\sqrt{2}$.

$$V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \mathrm{d}r \int_{\frac{r^2}{2}}^{\sqrt{8-r^2}} r \mathrm{d}z = \frac{4\pi}{3}(8\sqrt{2}-7).$$

4. Podana je krivulja

$$r(t) = \left(t^3+t, t^3+at, 4t^2+2t-1\right).$$

Določi parameter $a \in \mathbb{R}$ tako, da bo krivulja ravninska in določi ravnino v kateri leži.

Rešitev: Želimo, da je torzijska ukrivljenost ničelna, torej mora veljati

$$[r'(t), r''(t), r'''(t)] = 48(a-1) = 0.$$

Pri vrednosti $a = 1$ je $r(0) = (0,0,-1)$, binormala pa je enaka

$$B = \frac{\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)}{|\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0).$$

Krivulja torej leži v ravnini x-y=0.