1. IZPIT
ANA3 IŠRM 2.LETINK
4.2.2013

(1) Naj bo $z = z(x, y)$ funkcija neodvisnih spremenljivk x in y ter naj bo podan izraz

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = y\,.$$

(a) [20%] Kako se zgornji izraz glasi v koordinatah (u, v), za katere velja

$$x = \frac{u}{v} \quad y = uv\,.$$

(b) [5%] Poišči primer funkcije $z(x, y)$, ki zadošča zgornjemu izrazu.

(2) [25%] Poišči zaprt valj površine 2π, ki ima največji možni volumen.

(3) [25%] Izračunaj volumen telesa $T \subset \mathbb{R}^3$, podanega z

$$(x-1)^2 + y^2 \leq 1\,,$$
$$z \geq 0 \quad \text{in} \quad z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

(4) [25%] Poišči splošno rešitev diferencialne enačbe

$$2y' + y = \frac{x}{y}$$

s pomočjo uvedbe nove funkcije $z(x) = y(x)^2$.

Rešitve - 1.izpit

(1) **Rešitev:**

(a) Imamo izraz

$$\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = y$$

in koordinate

$$x = \frac{u}{v} \quad y = uv\,.$$

Izračunamo

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{1}{v} + \frac{\partial z}{\partial y}v \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{\partial z}{\partial x}\frac{u}{v^2} + \frac{\partial z}{\partial y}u$$

od koder dobimo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{v}{2}\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{v^2}{2u}\frac{\partial z}{\partial v} \quad \text{in} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2v}\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{1}{2u}\frac{\partial z}{\partial v}\,.$$

To vstavimo v izraz $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = y$ in dobimo izraz

$$\frac{\partial z}{\partial u} = u\,.$$

(b) Iz enačbe $\frac{\partial z}{\partial u} = u$ vidimo, da je primer funkcije, ki zadošča temu izrazu npr. funkcija $z(u,v) = \frac{u^2}{2}$. Upoštevamo, da je $u^2 = xy$, kar pomeni, da funkcija

$$z(x,y) = \frac{xy}{2}$$

zadošča izrazu $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{y}{x}\frac{\partial z}{\partial y} = y$.

✓

(2) **Rešitev:** Naj bo r polmer valja in h višina. Površina valja je $P = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, volumen pa $V = \pi r^2 h$. Iščemo torej r in h, da bo V maksimalen, pri pogoju $P = 2\pi$. Sestavimo vezani ekstrem

$$F(r,h,\lambda) = \pi r^2 h + \lambda(2\pi r^2 + 2\pi rh - 2\pi)\,,$$

od koder dobimo enačbe

$$2\pi rh + \lambda(4\pi r + 2\pi h) = 0$$

$$\pi r^2 + \lambda(2\pi r) = 0$$

$$2\pi r^2 + 2\pi rh - 2\pi = 0$$

Iz druge enačbe sledi $\lambda = -\frac{1}{2}r$, kar vstavimo v prvo enačbo, od koder dobimo

$$h = 2r\,.$$

To vstavimo v tretjo enačbo in dobimo rezultat $r = \frac{\sqrt{3}}{3}$ in $h = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

✓

(3) **Rešitev:** V cilindričnih koordinatah se volumen glasi

$$V = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r\,dr \int_0^r dz =$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^2\,dr = \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\,d\varphi$$

Z novo spremenljivko $u = \sin\varphi$ dobimo

$$V = \frac{16}{3}\int_0^1 (1-u^2)\,du = \frac{32}{9}\,.$$

✓

(4) **Rešitev:**Ob uvedbi nove funkcije $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$, se enačba $2y' + y = \frac{x}{y}$ spremeni v

$$z' + z = x\,.$$

To je linearna diferencialna enačba, katere splošna rešitev je

$$z(x) = x - 1 + Ce^{-x}\,.$$

Splošna rešitev enačbe $2y' + y = \frac{1}{y}$ je potem

$$y(x) = \sqrt{x - 1 + Ce^{-x}}\,.$$

✓