Prvi izpit - ANA3(IŠRM)

Rešitve

1. Podana je krivulja

$$r(t) = \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right).$$

Poišči enotska vektorja v smereh tangente in glavne normale v koordinatnem izhodišču. Izračunaj dolžino krivulje na odseku med koordinatnim izhodiščem in točka $T(2,3,4)$. Dokaži, da sta torzijska in fleksijska ukrivljenost krivulje v vseh točkah krivulje enaki.

Rešitev:

$$T = \frac{\dot{r}(0)}{|\dot{r}(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \quad B = \frac{\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)}{|\dot{r}(0) \times \ddot{r}(0)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1),$$

$$N = T \times B = (0,-1,0), l = \int_0^1 |\dot{r}(t)|\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}, \quad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{3(1+t^2)^2}.$$

2. Izračunaj integral s parametrom

$$F(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-x} - e^{-ax-x}}{x}\mathrm{d}x.$$

Velja

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-ax-x}\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}.$$

Torej je $F(a) = \ln(1+a) + C$. Če vstavimo $a = 0$ dobimo $C = 0$.

3. Reši diferencialni enačbi

a)

$$y' - \frac{y}{x} = \frac{x^2 + y^2}{x^2}, \quad y(1) = 1,$$

b)

$$x^2y'' - xy' + y = 2x.$$

Prva enačba je homogena. Uporabimo novo spremenljivko $t = y/x$. V tej spremenljivki dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami $xt' = 1 + t^2$. Tako dobimo rešitev

$$y(x) = x\tan(\ln x + C).$$

Zaradi začetnega pogoja mora biti $C = \frac{\pi}{4}$.
Druga enačba je Eulerjeva. Uporabimo substitucijo $x = e^t$, $xy' = \dot{y}$ in $x^2y'' = \ddot{y} - \dot{y}$, ter preoblikujemo enačbo v

$$\ddot{y} - 2\dot{y} + y = 2e^t.$$

Homogeni del te enačbe ima rešitev $y_H(t) = C_1e^t + C_2te^t$. Partikularni del lahko poiščemo z nastavkom $y_P(t) = Ct^2e^t$ in dobimo $C = 1$. Rešitev začetne enačbe je torej

$$y(x) = C_1x + C_2x\ln x + x\ln^2 x.$$

4. Izračunaj integral

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}V,$$

kjer je $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq z\}$.

Območje D je sfera s središčem v točki $S(0, 0, 1/2)$ in radijem $1/2$. Integral rešimo v sferičnimi koordinatami (φ, θ, R)

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\sin\theta} R^3 \cos\theta \mathrm{d}R = \frac{\pi}{10}.$$

ali pa z uporabo cilindričnih koordinat (φ, r, z) :

$$\iiint_D \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\mathrm{d}V = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{1} \mathrm{d}z \int_0^{\sqrt{z-z^2}} r\sqrt{r^2 + z^2}\mathrm{d}r = \frac{\pi}{10}.$$