Prvi kolokvij - ANA3(IŠRM)

Rešitve

1. a) Pokaži, da je z enačbo $2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz + 3 = 0$ v okolici točke $(x, y) = (1, -1)$ podana natanko ena funkcija $z(x, y)$ z lastnostjo $z(1, -1) = 1$.

   b) Skiciraj množico točk v katerih preslikava $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \Big(x^2 + y^2, 2xy \cos\Big(\pi(x^2 + y^2)\Big)\Big)$$

   ni lokalni difeomorfizem.

   c) Pokaži, da je $T(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ stacionarna točka funkcije $z \circ f$.

Rešitev:

Označimo z

$$F(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz + 3.$$

Ker je $F(1, -1, 1) = 0$, je za točko $a)$ dovolj preveriti, da je $J_z F(1, -1, 1) = -6 \neq 0$.

Preslikava f ni lokalni difeomorfizem, kjer velja, da je

$$\det Jf(x, y) = (x - y)(x + y) \cos\Big(\pi(x^2 + y^2)\Big) = 0.$$

Množica točk, ki zadošča temu pogoju je sestavljena iz simetrale lihih in sodih kvadrantov, ter krožnic s polmerom $\sqrt{1/2 + n}$, kjer je $n \in \mathbb{N}$.

S pomočjo verižnega pravila izračunamo

$$J_{z\circ f}(T) = J_z(1, -1) Jf(T) = [-2/3, -2/3] \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} \end{bmatrix} = [0, 0]$$

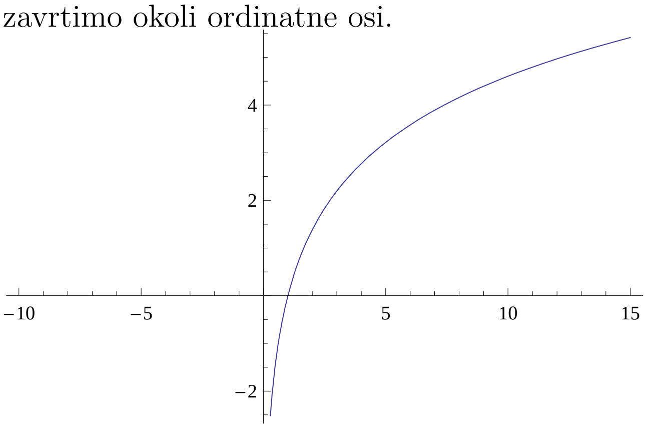
(matriko $J_z(1, -1)$ dobimo tako, da enačbo v točki a) odvajamo implicitno po x in y).

2. a) Skiciraj ploskev Σ podano s predpisom $z = \ln(x^2 + y^2)$.

   b) Krivulja K je podana kot množica točk na ploskvi Σ, ki zadošča zvezi $r = e^\varphi$ (cilindrične koordinate). Skiciraj krivuljo K na ploskvi Σ. Nasvet: Pomagaj si tako, da najprej skiciraš projekcijo krivulje v ravnini x, y.

   c) Pokaži, da v vsaki točki krivulje K sovpadata pritisnjena ravnina na K in normalna ravnina na ploskev Σ. Določi enačbo te ravnine v točki $T(1, 0, 0)$.

Rešitev:
Ploskev skiciramo bodisi z nivojnicamo bodisi z uporabo cilindričnih koordinat $z = 2\ln r$. Sliko ploskve tako dobimo, če spodnji graf zavrtimo okoli ordinatne osi.



Projekcija krivulje K v ravnini $z = 0$ je neskončna spirala, ki se na enem koncu približuje točki $(0, 0)$, na drugem pa gre proti neskončnosti. Spiralo prenesemo na ploskev tako, da točkam dodamo ustrezno višino $z = \ln r$.
Pri točko c) je potrebno poiskati primerno parametrizacijo ploskve in krivulje. Pri obeh si lahko pomagamo s cilindričnimi koordinatami (lahko bi računali tudi s kartezičnimi)

$$\Sigma : f(r, \varphi) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi, 2/r),$$
$$K : \gamma(\varphi) = (e^{\varphi}\cos\varphi, e^{\varphi}\sin\varphi, 2\varphi).$$

Sedaj izračunamo

$$\vec{n} = f_r \times f_\varphi = (\cos\varphi, \sin\varphi, r),$$
$$\vec{B} = \dot{\gamma} \times \ddot{\gamma} = (-4e^{\varphi}\cos\varphi, -4e^{\varphi}\sin\varphi, 2e^{2\varphi}).$$

Če oba vektorja normiramo, ugotovimo, da v točkah krivulje K, kjer je $r = e^{\varphi}$, sovpadata.

3. S predpisom
$$F(a) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos(ax)}{x} e^{-x} \mathrm{d}x$$
je dobro definirana realna funkcija. Poišči njen zapis z elementarnimi funkcijami.

Rešitev:
Funkcijo odvajamo po spremenljivki a in nato integriramo po x z dvakratno uporabo metode *perpartes*. Dobimo

$$F'(a) = \int_0^\infty e^{-x}\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2 + 1}.$$

Sedaj izračunamo nedoločeni integral

$$F(a) = \int \frac{a}{a^2+1}\mathrm{d}a = \frac{1}{2}\ln(a^2+1) + C$$

in določimo konstanto $C = 0$ s pomočjo vrednosti funkcije v točki $a = 0$.

4. Pokaži, da je s sistemom

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4 = 0$$

$$\sin(\pi xyz) = 0$$

določen natanko en par funkcij $y(x)$, $z(x)$, definiranih na okolici točke $x = 1$, z lastnostjo $y(1) = 1$, $z(1) = 2$. Pokaži, da je funkcija $y(x)$ v okolici točke $x = 1$ padajoča, funkcija $z(x)$ pa ima v tej točki lokalni maksimum.

Rešitev:
Označimo z

$$F(x, y, z) = (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz - 4, \sin(\pi xyz)).$$

Ker je $F(1, 1, 2) = 0$, je dovolj preveriti, da je

$$\det J_{(y,z)}F(1, 1, 2) = -21\pi \neq 0.$$

Obe enačbi nato implicitno odvajamo po x in vstavimo točko $(x, y, z) = (1, 1, 2)$. Iz dobljenega sitema enačb je razvidno, da je $y'(1) = -1$ in $z'(1) = 0$. Če enačbi odvajamo še enkrat, dobimo tudi $z''(1) = -16/7$.