1.kolokvij
ANA3 IŠRM 2.letnik
15.11.2012
✍ 90 min

(1) [25%] Naj bo $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$ dano območje v $\mathbb{R}^2$ in preslikava $f : D \to \mathbb{R}^2$ podana s predpisom

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)\,.$$

Izračunaj, kako preslikava f preslika rob območja D in nato skiciraj, kako f preslika celotno območje D.

(2) (a) [15%] Izračunaj linearno aproksimacijo funkcije $z = z(x,y)$ podane implicitno z enačbo

$$x = z \ln \frac{z}{y} + z$$

v okolici točke $(x,y) = (1,1)$ (kjer je $z(1,1) = 1$).

(b) [10%] S pomočjo linearne aproksimacije približno izračunaj vrednost izraza

$$\frac{e^{-\sin 0.07}}{\sqrt{9.2}}$$

(3) [25%] Naj bo $z = z(x,y)$ funkcija neodvisnih spremenljivk x in y. Kako se izraz

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

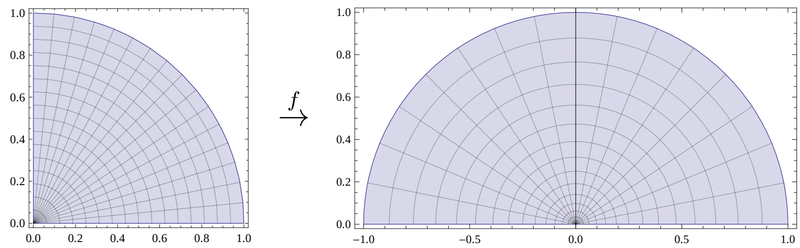
glasi v polarnih koordinatah (r,φ), za katere velja

$$x = r\cos\varphi \quad y = r\sin\varphi\,.$$

(4) [25%] Naj bo dolžina kvadra enaka x, širina y in višina z. Izračunaj dolžine x, y, z tako, da bo imel kvader maksimalen volumen, pri pogoju, da ima površino enako 2.

Rešitve - 1.kolokvij

(1) **Rešitev:** Območje D in preslikano območje $f(D)$:



Preslikava f točke $(x,0) \mapsto (x^2,0)$, $(0,y) \mapsto (-y^2,0)$, tretji del roba, pa parametriziramo kot $(\cos t, \sin t)$ $t \in [0,\pi/2]$ in se slika v krivuljo $(\cos^2 t - \sin^2 t, 2\sin t\cos t) = (\cos 2t, \sin 2t)$, ki je polkrožnica z radijem 1.

✓

(2) **Rešitev:**

(a) Enačbo $x = z\ln\frac{z}{y} + z$ odvajamo parcialno po x (upoštevamo, da je $z = z(x,y)$) in izrazimo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{2+\ln\frac{z}{y}}$$

Nato enačbo $x = z\ln\frac{z}{y} + z$ odvajamo parcialno še po y (upoštevamo, da je $z = z(x,y)$) in izrazimo

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y\left(2+\ln\frac{z}{y}\right)}\,.$$

To pomeni, da je $\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = 1/2$ in $\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = 1/2$ in linearna aproksimacija je oblike

$$z(x,y) \cong 1 + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(y-1)\,.$$

(b) Izberemo funkcijo $f(x,y) = \frac{e^{-\sin x}}{\sqrt{y}}$ in izračunamo linearno aproksimacijo v točki $(0,9)$. Dobimo

$$f(x,y) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x - \frac{1}{54}(y-9)\,.$$

Od tod dobimo rezultat

$$\frac{e^{-\sin 0.07}}{\sqrt{9.2}} \cong \frac{1}{3} - \frac{0.07}{3} - \frac{0.2}{54} = 0.306\,.$$

✓

(3) **Rešitev:** S posrednim odvajanjem najprej izračunamo

$$z_r = z_x \cos\varphi + z_y \sin\varphi$$
$$z_\varphi = -z_x r \sin\varphi + z_y r \cos\varphi$$

in od tod izrazimo

$$z_x = \cos\varphi\, z_r - \frac{\sin\varphi}{r} z_\varphi$$
$$z_y = \sin\varphi\, z_r + \frac{\cos\varphi}{r} z_\varphi\,.$$

To vstavimo v izraz $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}$ in dobimo

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = r\cos\varphi\left(\cos\varphi\, z_r - \frac{\sin\varphi}{r} z_\varphi\right) + r\sin\varphi\left(\sin\varphi\, z_r + \frac{\cos\varphi}{r} z_\varphi\right) =$$
$$= r z_r\,.$$

Druga stran enačbe $\sqrt{x^2+y^2} = r$, dobimo torej $rz_r = r$ in s tem rezultat

$$\frac{\partial z}{\partial r} = 1\,.$$

✓

(4) **Rešitev:** Iščemo maksimum funkcije $f(x, y, z) = xyz$ pri pogoju $xy + xz + yz = 1$. Dobimo vezani ekstrem

$$G(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xy + xz + yz - 1)$$

in od tod z odvajanji po x, y, z in λ sistem enačb:

$$yz - \lambda(y + z) = 0$$
$$xz - \lambda(x + z) = 0$$
$$xy - \lambda(x + y) = 0$$
$$xy + xz + yz - 1 = 0$$

Iz prvih dveh enačb sledi $z = \frac{\lambda y}{y-\lambda}$ in $z = \frac{\lambda x}{x-\lambda}$ in od tod $\frac{\lambda y}{y-\lambda} = \frac{\lambda x}{x-\lambda} \Rightarrow x = y$. Enak premislek na prvi in tretji enačbi nam da enakost $x = z$, torej $x = y = z$. Iz zadnje enačbe dobimo rezultat; kvader maksimalnega volumna je **kocka** s stranico $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

✓