

Analiza 1 (IŠRM): 1. kolokvij

25.11.2013

Čas pisanja je 100 minut. Vse odgovore je potrebno dobro utemeljiti.
Veliko uspeha!

1. naloga (25 točk)

Naj bo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ preslikava podana s predpisom

$$f(x, y, z) = ((1 + x \cos y) \cos z, (1 + x \cos y) \sin z, x \sin y),$$

kjer je $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 2\pi)$ in $z \in [0, 2\pi)$.

- Izračunaj Jacobijevo matriko preslikave f .
- Poišči točke, v katerih f nima lokalnega inverza.

2. naloga (25 točk)

Preslikava $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ naj bo podana s predpisom

$$f(x, y) = (x \ln(1 + y^2) + x^2 y, x^2 + y^2 - 4).$$

- Pokaži, da je točka $A(2, 0)$ fiksna točka preslikave f , t.j. $f(A) = A$.
- Pokaži, da obstaja inverz v okolici točke $A(2, 0)$.
- Naj bo $g(x, y) = y^3 + xy + \arctg \frac{x}{2}$. Izračunaj približno vrednost $(g \circ f^{-1})(1.9, 0.2)$.

3. naloga (25 točk)

Pokaži, da je s sistemom enačb

$$\begin{aligned}x^2 + xy + xz^2 - 3y &= 4, \\ \cos(\pi(xy + yz)) &= 0\end{aligned}$$

določen natanko en par funkcij $y(x)$ in $z(x)$, definiranih na okolici točke $x = 1$, z lastnostjo $y(1) = \frac{1}{2}$ in $z(1) = 2$. Pokaži, da je v okolici točke $x = 1$ funkcija $y(x)$ naraščajoča, funkcija $z(x)$ pa padajoča.

4. naloga (25 točk)

Poišči stacionarne točke funkcije

$$F(y) = \int_0^y \frac{\sin(\pi xy)}{x} dx$$

na intervalu $(0, 2)$ in jih klasificiraj.