Drugi kolokvij - ANA3(IŠRM)

Rešitve

1. Reši diferencialni enačbi

   a)
$$y' - \frac{y}{x^2+x} = x, \quad y(1) = 5/4$$

   b)
$$y' = \frac{y}{x}\left(1 + \frac{1}{\cos\left(\ln\frac{y}{x}\right)}\right).$$

   Enačba v točki a) je linearna. Najprej rešimo homogeni del
$$\frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}.$$
   Z integracijo dobimo
$$\ln y = \ln x - \ln(x+1) + C$$
$$y_H(x) = C\frac{x}{x+1}$$
   Za iskanje partikularnega dela rešitve uporabimo variacijo konstante in dobimo $C' = x+1$ oz. $C = x^2/2 + x$. Splošna rešitev diferencialne enačbe je torej
$$y = C\frac{x}{x+1} + \frac{(x/2+1)x^2}{x+1}.$$
   Če upoštevamo začetni pogoj, dobimo vrednost konstante $C = 1$.

   Enačba v točki b) je homogena, zato vpeljemo novo spremenljivko $t = y/x$ oz. $y' = t'x + t$. Dobimo enačbo z ločljivimi spremenljivkami
$$\frac{\cos(\ln t)}{t}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{x},$$
   ki jo rešimo z integracijo in dobimo $\sin(\ln t) = \ln x + C$ oz.
$$y(x) = xe^{\arcsin(\ln x + C)}.$$

2. Reši diferencialni enačbi

   a)
$$y'' + 3y' + 2y = e^x + 1$$

b)

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Enačbi imata skupen homogeni del s karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0.$$

Zato je

$$y_H(x) = Ce^{-x} + De^{-2x}.$$

Partikularni del prve enačbe poiščemo z nastavkom $y = A + Be^x$ in dobimo vrednost konstant $A = 1/2$, $B = 1/6$. Rešitev prve enačbe je torej

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{-2x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6}e^x.$$

Za partikularni del druge enačbe uporabimo metodo variacije konstante t.j. rešimo sistem

$$C'e^{-x} + D'e^{-2x} = 0$$

$$-C'e^{-x} - 2D'e^{-2x} = \frac{1}{e^x + 1}.$$

Dobimo $C = \ln(e^x + 1)$, $D = -e^x + \ln(e^x + 1)$, kar da rešitev

$$y(x) = Ce^{-x} + De^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(e^x + 1) - e^{-x}.$$

3. Podan je dvakratni integral

$$\int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x^2-1}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{5}}^3 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

Skiciraj njegovo integracijsko območje in zamenjaj vrstni red integracije. Izračunaj njegovo vrednost za $f(x,y) = x$.

Velja

$$\int_1^{\sqrt{5}} \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{x^2-1}} f\mathrm{d}y + \int_{\sqrt{5}}^3 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f\mathrm{d}y = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_{\sqrt{y^2+1}}^{\sqrt{9-y^2}} f\mathrm{d}x.$$

Če vstavimo $f(x,y) = x$ dobimo vrednost 8.

4. Izračunaj težišče homogenega telesa

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, x^2 + y^2 \leq z^2, z \geq 0\right\}.$$

Uporabimo cilindrične koordinate (φ, r, z). Telo D je presek stožca $z = r$ in sfere s središčem v izhodišču in polmerom 2. Zaradi simetrije sta x_T in y_T enaka 0. Izračunamo

$$\iiint_D z dV = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int r^{\sqrt{2-r^2}} rz \mathrm{d}z = \frac{5\pi}{12}$$

$$\iiint_D dV \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}r \int r^{\sqrt{2-r^2}} r \mathrm{d}z = \frac{2\pi}{3}(\sqrt{2} - 1).$$

Torej je $z_T = 5/(8\sqrt{2} - 8)$.