2. KOLOKVIJ
ANA3 IŠRM 2.LETINK
21.1.2013

(1) [25%] Izračunaj integral s parametrom

$$I(a) = \int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-x}}{x} dx$$

za $a > 0$. Preveri enakomerno konvergenco, kjer je to potrebno.

(2) [25%] Izračunaj dvojni integral

$$\int_0^{\sqrt{2}} dx \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2 + y^2}\, dy\,.$$

(3) [25%] Poišči splošno rešitev linearne diferencialne enačbe

$$y' + \cos(x)\, y = \sin x \cos x\,.$$

(4) [25%] Poišči rešitev diferencialne enačbe

$$y'' + y = \sin^2 x\,,$$

ki zadošča začetnim pogojem $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$.

Rešitve - 2.kolokvij

(1) **Rešitev:** Izračunamo

$$I'(a) = \int_0^\infty -e^{-ax}dx$$

Ta integral enakomerno konvergira na vsakem intervalu $[a_0, \infty]$ za $a_0 > 0$ (oz. lokalno enakomerno konvergira za vsak $a > 0$), saj za vsak $\epsilon > 0$ velja

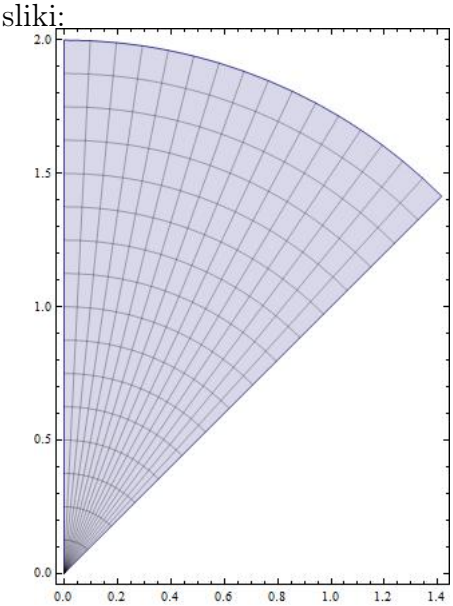
$$|\int_b^\infty -e^{-ax}dx| \leq \int_b^\infty e^{-a_0 x}dx = \frac{1}{a_0}e^{-a_0 b} < \epsilon$$

če $b > \frac{\ln \frac{1}{a_0 \epsilon}}{a_0}$. Dobimo $I'(a) = -\frac{1}{a}$, $I(a) = -\ln a + C$. Ker je $I(1) = 0$, nazadnje dobimo

$$I(a) = -\ln a\,.$$

✓

(2) **Rešitev:** Območje, ki ga dobimo iz mej integrala je na spodnji sliki:



Integral se v polarnih koordinatah glasi

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 r^2\, dr = \ldots = \frac{2\pi}{3}\,.$$

✓

(3) **Rešitev:** Najprej rešimo homogeni del:

$$y' + y\cos x = 0 \Rightarrow \frac{y'}{y} = -\cos x \Rightarrow y_H = Ce^{-\sin x}$$

Nastavek za partikularno rešitev $y_P = C(x)e^{-\sin x}$. Vstavimo v enačbo $y' + \cos(x)\, y = \sin x \cos x$ in dobimo

$$C' = e^{\sin x} \sin x \cos x \Rightarrow C(x) = e^{\sin x}(\sin x - 1)\,,$$

od koder sedaj dobimo splošno rešitev

$$y(x) = Ce^{-\sin x} + \sin x - 1\,.$$

✓

(4) **Rešitev:** Najprej poiščemo rešitev homogene enačbe

$$y'' + y = 0\,.$$

Vstavimo $y = e^{\lambda x} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$ in od tod sledi rešitev homogene enačbe

$$y_H = A\cos x + B\sin x\,.$$

Za partikularno najprej rešimo sistem

$$\begin{bmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin^2 x \end{bmatrix},$$

od koder sledi

$$A' = -\sin^3 x \Rightarrow A(x) = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}$$

in

$$B' = \sin^2 x \cos x \Rightarrow B(x) = \frac{\sin^3 x}{3}\,.$$

Partikularna rešitev $y_P = A(x)\cos x + B(x)\sin x$ je sedaj

$$y_P = \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\sin^4 x}{3}\,.$$

Splošna rešitev je sedaj

$$y = A\cos x + B\sin x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\sin^4 x}{3}\,.$$

Upoštevamo začetne pogoje $y(0) = 0$ in $y'(0) = 1$, od koder sledi $A = -2/3$ in $B = 1$, končni rezultat je

$$y = -\frac{2}{3}\cos x + \sin x + \cos^2 x - \frac{\cos^4 x}{3} + \frac{\sin^4 x}{3}\,.$$

✓