Funkcije[1]

Funkcija je enolična relacija $f \in \mathrm{Rel}(A, B)$ tj.

$$\forall x \in A, y_1, y_2 \in B : (x\, f\, y_1 \ \wedge \ x\, f\, y_2 \ \Rightarrow \ y_1 = y_2)$$

Funkcija f je **preslikava iz** A **v** B. Pišemo $f : A \to B$, če je $\mathcal{D}_f = A$.

Pisava

Namesto $x\, f\, y$ pišemo $y = f(x)$.

Za preslikavo $f : A \to B$ velja:

- $A = \mathcal{D}_f$ je **domena** oz. **definicijsko območje**
- B je **kodomena**
- **Slika** oz. **zaloga vrednosti** je

$$\mathcal{Z}_f = \{y \in B; \exists x \in A : f(x) = y\}\,.$$

$B^A = \{f\,;\ f : A \to B\}$ je množica vseh preslikav iz A v B.

[1](zadnji update 11. januar)

Nekateri tipi funkcij

- **prazna funkcija** $\emptyset : \emptyset \to B$. Velja
  1. $B^{\emptyset} = \{\emptyset\}$
  2. $\emptyset^A = \emptyset$, če $A \neq \emptyset$.
- **identiteta** $\mathrm{id}_A : A \to A$, $\forall x \in A : \mathrm{id}_A(x) = x$. Identiteta je bijektivna funkcija.
- **vložitev** $i : A \to B$ če je $A \subseteq B$ ter $i(x) = x$ za vse $x \in A$. Funkcija i je injektivna.
- **projekcija na i-to komponento** je $p_i : A_1 \times \cdots \times A_n \to A_i$, če $p_i(a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_i$. Ta funkcija je surjektivna.
- **naravna (kanonska) projekcija** je $p : A \to A/R$, kjer je R ekvivalenčna relacija na A ter $p(x) = R[x]$ za vse $x \in A$. To je surjektivna funkcija.
- **karakteristična funkcija podmnožice A množice B**

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B \setminus A\,. \end{cases}$$

- **zožitev funkcije $f : A \to B$ na $A_1 \subseteq A$** je funkcija $g : A_1 \to B$, če $g(x) = f(x)$ za vsak $x \in A_1$. Pišemo $g = f|_{A_1}$.

Lastnosti preslikav

Naj bo $f : A \to B$ preslikava. Definiramo

- f je **injektivna**, če $\forall x, y \in A : (f(x) = f(y)) \Rightarrow x = y)$;
- f je **surjektivna**, če $\mathcal{Z}_f = B$;
- f je **bijektivna**, če je injektivna in surjektivna.

Naloga 1 *Katere od zgornjih lastnosti imajo funkcije*

- $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ *kjer je* $f(x) = 2x$
- $\mathrm{id}_{\mathbb{N}}$
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ *kjer je* $f(x) = x^2$*?*

Inverzna funkcija oz. preslikava

Za vsako funkcijo f obstaja inverzna relacija f^{-1}. Kdaj je relacija f^{-1} funkcija oz. preslikava?

Trditev 1 *Naj bo f funkcija iz A v B. Potem*

(a) *Relacija f^{-1} je funkcija natanko tedaj, ko je f injektivna;*

(b) *Relacija f^{-1} je preslikava natanko tedaj, ko je f bijektivna.*

Dokaz. Dokažimo najprej trditev (a) takole:

$$\begin{aligned}
f^{-1} \text{ je funkcija} \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x, y, z : (x\, f^{-1}\, y \ \wedge \ x\, f^{-1}\, z \ \Rightarrow \ y = z) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x, y, z : (y\, f\, x \ \wedge \ z\, f\, x \ \Rightarrow \ y = z) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x, y, z : (x = f(y) \ \wedge \ x = f(z) \ \Rightarrow \ y = z) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall y, z : (f(y) = f(z) \ \Rightarrow \ y = z) \\
&\Leftrightarrow \quad f \text{ je injekcija.}
\end{aligned}$$

Sledi dokaz točke (b): f^{-1} je preslikava natanko takrat, kadar je f^{-1} funkcija za katero velja $D_{f^{-1}} = B$. Po trditvi (a) je f^{-1} funkcija natanko takrat, ko je f injektivna. Torej, funkcija f^{-1} je preslikava natanko takrat, ko je f surjekcija. Od tod pa sledi trditev. $\square$

Kompozitum funkcij

Naj bosta $f \subseteq A \times B$ in $g \subseteq B \times C$. Definirajmo **kompozitum** $g \circ f \subseteq A \times C$ takole

$$\forall x \in \mathcal{D}_f : g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Trditev 2 *Za poljubni funkciji $f \subseteq A \times B$ in $g \subseteq B \times C$ velja*

$$g \circ f = f * g,$$

kjer je operacija $*$ relacijski produkt.

Dokaz. Pokažimo, da je $y = g \circ f(x)$ natanko takrat, kadar sta x in y v relaciji $f * g$:

$$\begin{aligned} x(f * g)y &\Leftrightarrow \exists z \in B : (x\, f\, z \wedge z\, g\, y) \\ &\Leftrightarrow \exists z \in B : f(x) = z \wedge g(z) = y \\ &\Leftrightarrow y = g(f(x)) \end{aligned}$$

$\square$

Lastnosti kompozituma

Trditev 3 *Velja*

- *Naj bosta f, g funkciji. Potem je $g \circ f$ funkcija.*
- *Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ preslikavi. Potem je $g \circ f$ tudi preslikava.*

Dokaz.

Problem 1 *Naj bo $f : A \to B$ preslikava. Pokaži, da velja:*

- $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$
- *f je injektivna* $\Leftrightarrow f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$
- *f je surjektivna* $\Leftrightarrow f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$.

Dokaz.

Trditev 4 *Naj bosta $f : A \to B$ in $g : B \to C$ preslikavi. Potem velja*

- *f in g injekciji $\Rightarrow g \circ f$ injekcija;*
- *f in g surjekciji $\Rightarrow g \circ f$ surjekcija;*
- *$g \circ f$ injekcija $\Rightarrow f$ injekcija;*
- *$g \circ f$ surjekcija $\Rightarrow g$ surjekcija.*

Dokaz.

Trditev 5 *Naj za preslikavi $f : A \to B$ in $g : B \to A$ velja $g \circ f = \mathrm{id}_A$ ter $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Potem sta f in g bijektivni ter $g = f^{-1}$.*

Dokaz. Iz $f \circ g = \mathrm{id}_B$ sledi, da je g injektivna ter f surjektivna. Podobno iz $g \circ f = \mathrm{id}_A$ sklepamo, da je f injektivna ter g surjektivna. Torej sta funkciji g in f bijekciji. Pokažimo, da je prva inverzna drugi:

$$g = \mathrm{id}_A \circ g = (f^{-1} \circ f) \circ g = f^{-1} \circ (f \circ g) = f^{-1} \circ \mathrm{id}_B = f^{-1}\,.$$

$\square$

Slike in praslike

Naj bo $f \subseteq A \times B$ funkcija ter $A_1 \subseteq A$ in $B_1 \subseteq B$.

- **Slika** množice A_1 je

$$f(A_1) = \{y \in B; \exists x \in A_1 : y = f(x)\}$$

- **Praslika** množice B_1 je

$$f^{-1}(B_1) = \{x \in A; f(x) \in B_1\}$$

Lastnosti: Za funkcijo $f \in A \times B$ ter $A_1, A_2 \subseteq A$ in $B_1, B_2 \subseteq B$ velja:

- $f^{-1}(f(A_1)) \supseteq A_1$ (če je f injektivna, velja enačaj)
- $f(f^{-1}(B_1)) \supseteq B_1$ (če je f surjektivna, velja enačaj)
- $f(\emptyset) = \emptyset$
- $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
- $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
- $f^{-1}(B_1 \cap B_2) \subseteq f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$

Permutacije

Naj bo A končna množica. **Permutacija** na A je poljubna bijektivna funkcija.

$S(A)$ - množica vseh permutacij na A;

Množico vseh permutacij na $\{1, 2, \ldots, n\}$ označimo s S_n.

Za vsako permutacijo iz S_n rečemo, da je **dolžine** n ter jo ponavadi podamo s tabelo takole:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{pmatrix},$$

kjer so vsi a_i paroma različni elementi množice $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Zgledi:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 2;
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ je permutacija reda 4;

Vprašanje 1 *Koliko je različnih permutacij reda n?*

Produkt permutacij

Ker so permutacije funkcije oz. relacije, lahko uporabljamo produkte $\circ$ oz. $*$.

Torej za poljubni permutaciji α in β iz S_n velja

$$\alpha \circ \beta \quad = \quad \beta * \alpha$$

Zgled: Naj bo

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ter} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Potem je

$$\beta \circ \alpha = \alpha * \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

in

$$\alpha \circ \beta = \beta * \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Naloga 2 *Ali je $*$ oz. $\circ$ komutativna operacija?*

Opomba: Med $*$ in $\circ$ za "default" izberemo $*$. Torej, $\alpha\,\beta$ pomeni $\alpha * \beta$!

Identiteta in fiksne točke

Identiteta reda n je

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \end{pmatrix}$$

Za vsako drugo permutacijo $\pi \in S_n$ velja $\mathrm{id} * \pi = \pi * \mathrm{id} = \pi$.

Trditev 6 *Za vsako permutacijo π obstaja "inverzna" permutacija π^{-1} in tako velja*

$$\pi * \pi^{-1} \;=\; \pi^{-1} * \pi \;=\; \mathrm{id}.$$

Število k je **fiksna točka** permutacije π, če je $\pi(k) = k$. Rečemo tudi, da π **pribije** k.

Velja:

- id pribije vsa števila;
- π in π^{-1} pribijeta ista števila.

Cikli

Permutacija π je **cikel** natanko takrat, ko obstaja neprazno zaporedje različnih števil

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{r-1}$$

iz množice $\{1, 2, \ldots, n\}$ ter velja:

- π pribije vsa števila, ki niso v zaporedju;
- za števila iz zaporedja velja $\pi(a_k) = a_{k+1 \mod r}$

V takem primeru zapišemo $\pi = (a_0\, a_1\, a_2\, \cdots\, a_{r-1})$. Število r je **dolžina** cikla.

Vaja:

- Zapiši cikel $(3\,6\,2\,4)$ kot permutacijo dolžine 6!
- Zmnoži cikla $(1\,2\,3)$ in $(3\,1\,6)$.

Velja:

- Če je $C = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_n)$, potem je $C^{-1} = (a_n\, a_{n-1}\, \cdots\, a_1)$.
- Če sta C_1 in C_2 disjunktna cikla, potem $C_1\, C_2 = C_2\, C_1$.

Orbite

Trditev 7 *Vsaka permutacija se da (enoličnо) razcepiti na produkt disjunktnih ciklov. Razcep je enoličen do vrstnega reda ciklov.*

Elementi vsakega cikla razbitja tvorijo **orbite**.

Zgled: Permutacija

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 8 & 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

se zapiše kot produkt disjunktnih ciklov takole:

$$\alpha \quad = \quad (1\,6)\,(2\,4)\,(3\,7\,8\,9)\,(10).$$

Orbite te permutacije so $\{1, 6\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 7, 8, 9\}$ ter $\{10\}$.

Velja:

- Če je $\pi = C1 \circ C_2 \circ \cdots \circ C_k$ disjunktni razcep, potem je $\pi^{-1} = C_1^{-1} \circ C_2^{-1} \circ \cdots \circ C_k^{-1}$.

Sode in lihe permutacije

Cikel dolžine 2 imenujemo **transpozicija**. Vsak cikel daljši od 2, lahko zapišemo kot produkt transpozicij takole:

$$(a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \;=\; (a_1\, a_2)\,(a_1\, a_3)\,\cdots\,(a_1\, a_k)$$

Trditev 8 *Vsaka permutacija se da zapisati kot produkt transpozicij. Zapis ni enoličen, ohrani pa se parnost števila transpozicij.*

Permutacija je **soda**, če je sodo mnogo transpozicij v produktu, sicer pa je **liha**.

Zgledi: (123)(45) je liha permutacija, (125)(34)(6789) pa je soda permutacija.

$S_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132), (1)(23), (2)(13), (12)(3)\}$

$A_3 = \{\mathrm{id}, (123), (132)\}$ sode permutacije iz S_3.

Velja:

- id je soda permutacija,
- π in π^{-1} sta enake parnosti.

Ciklična struktura

Naj ima permutacija $\pi \in S_n$ v zapisu k_i ciklov dolžine i, za $i = 1, \ldots, n$.

Potem pravimo, da ima π **ciklično strukturo**

$$(k_1, k_2, \ldots, k_n).$$

Velja

$$1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + 3 \cdot k_3 + \cdots + n \cdot k_n = n.$$

Zgledi:

- Permutacija (123)(45)(56)(7)(89) ima ciklično strukturo

$$(1, 3, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

- Ciklična struktura permutacije id dolžine n je

$$(n, 0, \ldots, 0)$$

Naloga 3 *Pokaži, da imata π in π^{-1} enako ciklično strukturo.*

Red permutacije

Red $\mathrm{red}(\pi)$ permutacije π je najmanjše pozitivno naravno število k, za katerega velja $\pi^k = \mathrm{id}$.

Zgled: Poiščimo red permutacije

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 4 & 7 & 2 & 5 & 1 & 8 & 9 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

Trditev 9 *Red permutacije ima naslednje lastnosti:*

- *Če je C cikel dolžine m, potem je* $\mathrm{red}(C) = m$.
- *Če je π produkt tujih ciklov dolžine $m_1, m_2, \ldots, m_k$, potem je* $\mathrm{red}(\pi) = \mathrm{lcm}(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.
- *Za poljubno permutacijo π velja* $\mathrm{red}(\pi) = \mathrm{red}(\pi^{-1})$.

Dokaz.

Vaja:

Relacijo **konjugiranost** $\approx$ na $S(A)$ definiramo takole:

$$\pi_1 \approx \pi_2, \qquad \text{če} \quad \exists \tau \in G : \pi_2 = \tau \circ \pi_1 \circ \tau^{-1}$$

Izrek 10 *Permutaciji π in σ sta konjugirani natanko takrat, ko imata enako ciklično strukturo.*

Dokaz. ($\Rightarrow$). Če je $C = (i_1\, i_2\, \cdots\, i_k)$ cikel, potem je

$$\tau \circ C \circ \tau^{-1} = (\tau(i_1)\, \tau(i_2)\, \cdots\, \tau(i_k)).$$

Pri produktu disjunktnih ciklov pa tako učinkuje posebej na vsakem ciklu. Naj bo

$$\pi = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \circ (b_1\, b_2\, \cdots\, b_l) \circ \cdots \circ (c_1\, c_2\, \cdots\, c_m).$$

Potem je

$$\begin{aligned}
\tau \circ \pi \circ \tau^{-1} &= \tau \circ (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \circ (b_1\, b_2\, \cdots\, b_l) \circ \cdots (c_1\, c_2\, \cdots\, c_m) \circ \tau^{-1} \\
&= \tau \circ (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \circ [\tau^{-1} \circ \tau] \circ (b_1\, b_2\, \cdots\, b_l) \circ [\tau^{-1} \circ \tau] \circ \cdots (c_1\, c_2\, \cdots\, c_m) \circ \tau^{-1} \\
&= [\tau \circ (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \circ \tau^{-1}] \circ [\tau \circ (b_1\, b_2\, \cdots\, b_l) \circ \tau^{-1}] \circ \cdots [\tau \circ (c_1\, c_2\, \cdots\, c_m) \circ \tau^{-1}] \\
&= \big(\tau(a_1)\, \tau(a_2)\, \cdots\, \tau(a_k)\big) \circ \big(\tau(b_1)\, \tau(b_2)\, \cdots\, \tau(b_l)\big) \circ \cdots \big(\tau(c_1)\, \tau(c_2)\, \cdots\, \tau(c_m)\big).
\end{aligned}$$

($\Leftarrow$) Recimo:

$$\pi = (a_1\, a_2\, \cdots\, a_k) \circ (b_1\, b_2\, \cdots\, b_l) \circ \cdots \circ (c_1\, c_2\, \cdots\, c_m)$$

in

$$\sigma = (a_1'\, a_2'\, \cdots\, a_k') \circ (b_1'\, b_2'\, \cdots\, b_l') \circ \cdots \circ (c_1'\, c_2'\, \cdots\, c_m').$$

Definirajmo funkcijo $\tau : x \mapsto x'$. Očitno, da je τ permutacija iz $S(A)$. Velja pa $\tau \circ \pi \circ \tau^{-1} = \sigma$. To vidimo takole:

$$\tau \circ \pi \circ \tau^{-1}(x_i') = \tau \circ \pi(x_i) = \tau(x_{i+1}) = x_{i+1}' = \sigma(x_i').$$

$\square$

Naslednja trditev je hitra posledica prejšnjega izreka.

Posledica 11 *Konjugiranost $\approx$ je ekvivalenčna relacija.*