Izjavni račun - vsebina

1. Enostavne in sestavljene izjave;

2. Izjavni vezniki: negacija, konjunkcija, disjunkcija, implikacija, ekvivalenca, ...;

3. Izjavni izrazi kot formalizem izjav;

4. Resničnostna tabela, tavtologija, protislovje;

5. Enakovrednost izjav, zakoni izjavnega računa;

6. Disjunktivna normalna oblika (DNO) in konjunktivna normalna oblika (KNO);

7. Polni nabori izjavnih veznikov;

8. Sklepanje: pravilni in nepravilni sklepi, sklepi iz pogovornega področja;

9. Pravila sklepanja;

10. Pomožni sklepi: pogojni sklep, sklep s protislovjem, analiza primerov.

Izjavni račun

Izjava je stavek, ki je bodisi resničen ali neresničen.

Zgledi:

- Zunaj dežuje.
- DS1 je lahko narediti.
- Če zunaj sneži, potem ne grem na faks.
- Če se ne učim, potem letnika ne naredim.

Vsak stavek **ni** izjava. Recimo:

- Zapri vrata!
- Bodi tiho!
- Kaj bo za večerjo?

Izjave po **vsebini** ločimo na

- **resnične**: 6 ni praštevilo;
- **neresnične**: 6 je praštevilo.

Izjave po **zgradbi** ločimo na

- **osnovne:** Zunaj sije sonce. Peter sedi na vrtu.
- **sestavljene:** Če zunaj sije sonce, Peter sedi na vrtu.

Izjavni vezniki

Izjave sestavljamo z **izjavnimi vezniki**. Pri tem zahtevamo, da je resničnost sestavljene izjave enolično določena z resničnostjo njenih sestavnih delov.

n**-izjavni veznik** je neka n-člena operacija v množici $\{0,1\}$, oziroma to je preslikava oblike $F : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$.

Zgled: Preslikava F je trimestna operacija oz. trimestni veznik.

p	q	r	$F(p,q,r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Ponavadi uporabljamo naslednje veznike:

- **0-mestne:** 1 (resnica) in 0 (neresnica)
- **1-mestne:** $\neg$ (negacija)
- **2-mestne:** $\wedge$ (konjunkcija) , $\vee$ (disjunkcija), $\Rightarrow$ (implikacija), $\Leftrightarrow$ (ekvivalenca) , $\oplus$ (ekskluzivna disjunkcija), $\uparrow$ (Shefferjev veznik), $\downarrow$ (Lukasiewiczev veznik).

Opomba: Dvomestne izjavne veznike pišemo infiksno.

Negacija $\neg A$

Beremo: *ne A* oz. *ni res, da (velja) A*

A	$\neg A$
0	1
1	0

Velja: $\neg A$ je resnična natanko takrat, ko je A neresnična.

Konjunkcija $A \wedge B$

Beremo: *A in B*

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Velja: $A \wedge B$ je resnična natanko takrat, ko sta obe izjavi A in B resnični.

Disjunkcija $A \vee B$

Beremo: *A ali B*

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Velja: $A \vee B$ je resnična natanko takrat, ko je vsaj ena od izjav A in B resnična.

Implikacija $A \Rightarrow B$

Beremo: *iz A sledi B* oz. *če A, potem B* oz. *A implicira B*

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Izjavi A pravimo **antecedens**, izjavi B pa **konsekvens** .

Velja: $A \Rightarrow B$ je neresnična le v primeru, ko je A resnična in B neresnična.

Ekvivalenca $A \Leftrightarrow B$

Beremo: *A ekvivalentna B* oz. *A, če in samo če B* oz. *A natanko tedaj, ko B*

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Velja: $A \Leftrightarrow B$ resnična, kadar imata A in B enako vrednost.

Naloga 1 *Koliko je n-mestnih izjavnih veznikov?*

Zgled: V tabeli je naštetih vseh 16 dvomestnih izjavnih veznikov.

A	0	0	1	1	
B	0	1	0	1	
	0	0	0	0	0
	0	0	0	1	$A \wedge B$
	0	0	1	0	$\neg(A \Rightarrow B)$
	0	0	1	1	A
	0	1	0	0	$\neg(B \Rightarrow A)$
	0	1	0	1	B
	0	1	1	0	$A \oplus B$
	0	1	1	1	$A \vee B$
	1	0	0	0	$A \downarrow B$
	1	0	0	1	$A \Leftrightarrow B$
	1	0	1	0	$\neg B$
	1	0	1	1	$B \Rightarrow A$
	1	1	0	0	$\neg A$
	1	1	0	1	$A \Rightarrow B$
	1	1	1	0	$A \uparrow B$
	1	1	1	1	1

Dogovor o prednosti veznikov

Če ni z oklepaji drugače določeno, potem:

- $\neg$ veže močneje kot $\wedge$
- $\wedge$ veže močneje kot $\vee$
- $\vee$ veže močneje kot $\Rightarrow$
- $\Rightarrow$ veže močneje kot $\Leftrightarrow$
- Levi nastop veznika veže močneje od desnega nastopa istega veznika

Zgledi: Izraz

$$p \wedge \neg q \Rightarrow r \Leftrightarrow \neg\neg p \vee q$$

identificiramo z

$$((p \wedge (\neg q)) \Rightarrow r) \Leftrightarrow ((\neg(\neg p)) \vee q).$$

Podobno, izraz

$$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Rightarrow s \Rightarrow t$$

identificiramo z

$$(((p \Rightarrow q) \Rightarrow r) \Rightarrow s) \Rightarrow t.$$

Izraz

$$p \Rightarrow q \vee \neg r \Leftrightarrow p \wedge s$$

pa pomeni isto kot

$$(p \Rightarrow (q \vee (\neg r))) \Leftrightarrow (p \wedge s).$$

Naloga 2 *Poenostavi naslednje izraze tako, da odstraniš odvečne oklepaje:*

- $((p \vee (\neg q)) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p))$

- $(((p \vee q) \Leftrightarrow (r \wedge s)) \Rightarrow (\neg t))$

Izjavni izrazi

Izjavne izraze definiramo induktivno:

1. vsaka izjavna spremenljivka je izjavni izraz;
2. če je F n-mestni izjavni veznik in so $A_1, \ldots, A_n$ izjavni izrazi, je tudi $F(A_1, \ldots, A_n)$ izjavni izraz.

Zgledi: $0,\ \ 1,\ p,\ q,\ \neg p,\ q \wedge (p \Rightarrow \neg r),\ p \Rightarrow q \Rightarrow p.$

Opomba. Vsak izjavni izraz določa neko izjavo, zato jim bomo rekli kar izjave. Več različnih izjavnih izrazov lahko določa isto izjavo.

Resničnostna tabela

Naj bodo $p_1, p_2, \ldots, p_n$ izjavne spremenljivke, ki nastopajo v izjavnem izrazu A. Potem vrednosti A predstavimo v tabeli z 2^n vrsticami, ki ustrezajo vsem naborom vrednosti spremenljivk $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Tako tabelo imenujemo **resničnostna tabela** izjave A.

Zgled:

p	q	r	$(p \vee \neg q)$	$\Leftrightarrow$	$(r \Rightarrow p)$
0	0	0	1	**1**	1
0	0	1	1	**0**	0
0	1	0	0	**0**	1
0	1	1	0	**1**	0
1	0	0	1	**1**	1
1	0	1	1	**1**	1
1	1	0	1	**1**	1
1	1	1	1	**1**	1

Tavtologija, protislovje

Izjavni izraz A je

1. **tavtologija**, če je resničen pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk;
2. **protislovje**, če je neresničen pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk;
3. **nevtralen**, če ni niti tavtologija niti protislovje.

Da je izjava A tavtologija, označimo z $\models A$.

Zgledi:

- tavtologije: 1, $p \vee \neg p$, $(p \Rightarrow q) \vee (q \Rightarrow p)$, ...
- protislovja: 0, $p \wedge \neg p$, ..., negacije tavtologij;
- nevtralni izrazi: p, $p \Rightarrow q \vee r$, ...

Naloga 3 *Sestavi resničnostne tabele ter ugotovi, kakšni sta naslednji dve izjavi:*

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \Rightarrow q \qquad \textit{in} \qquad p \wedge \neg(p \vee q)$$

Enakovredne izjave

Izjavna izraza A in B sta **enakovredna**, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost. V tem primeru pišemo $A \sim B$.

Zgled: Izraza $p \Rightarrow q$ in $\neg q \Rightarrow \neg p$ sta enakovredna.

p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\Rightarrow$	$\neg p$
0	0	**1**	1	**1**	1
0	1	**1**	0	**1**	1
1	0	**0**	1	**0**	0
1	1	**1**	0	**1**	0

Trditev 1 *Velja*

$$A \sim B \textit{ natanko takrat, ko je } \models A \Leftrightarrow B$$

Dokaz. Sklepamo takole:

A in B sta enakovredna, n.t.k.

A in B sta vedno enake vrednosti (v tabeli), n.t.k.

$A \Leftrightarrow B$ ima vedno vrednost 1, n.t.k.

$A \Leftrightarrow B$ je tavtologija. $\square$

Vprašanje 1 *Ali je izjava*

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

tavtologija?

Enakovrednost izjav $\sim$ je ekvivalenčna relacija:

- **refleksivnost:** $A \sim A$
- **simetričnost:** če je $A \sim B$, potem je tudi $B \sim A$
- **tranzitivnost:** če je $A \sim B$ in $B \sim C$, potem je tudi $A \sim C$.

Naloga 4 *S pomočjo resničnostnih tabel ugotovi ali sta izjavi enakovredni:*

$$p \vee (p \wedge q) \quad \textit{in} \quad p \wedge (p \vee r)$$

Zakoni izjavnega računa

Naj bodo A, B, C poljubni izjavni izrazi.

- **Lastnosti 0 in 1:**

$$
\begin{array}{lll}
A \wedge 0 \sim 0 & A \Rightarrow 0 \sim \neg A & A \Leftrightarrow 0 \sim \neg A \\
A \wedge 1 \sim A & A \Rightarrow 1 \sim 1 & A \Leftrightarrow 1 \sim A \\
A \vee 0 \sim A & 0 \Rightarrow A \sim 1 & \neg 0 \sim 1 \\
A \vee 1 \sim 1 & 1 \Rightarrow A \sim A & \neg 1 \sim 0
\end{array}
$$

- **dvojna negacija:** $\neg\neg A \sim A$
- **idempotentnost:**

$$
\begin{array}{ll}
A \wedge A \sim A & A \Rightarrow A \sim 1 \\
A \vee A \sim A & A \Leftrightarrow A \sim 1
\end{array}
$$

- **komutativnost:**

$$
\begin{array}{ll}
 & A \vee B \sim B \vee A \\
A \Leftrightarrow B \sim B \Leftrightarrow A & A \wedge B \sim B \wedge A
\end{array}
$$

- **asociativnost:**

$$(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$$
$$(A \wedge B) \wedge C \sim A \wedge (B \wedge C)$$
$$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow C \sim A \Leftrightarrow (B \Leftrightarrow C)$$

- **absorpcija:**

$$A \vee (A \wedge B) \sim A \qquad A \wedge (A \vee B) \sim A$$

- **distributivnost:**

$$A \wedge (B \vee C) \;\sim\; (A \wedge B) \;\vee\; (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \;\sim\; (A \vee B) \;\wedge (A \vee C)$$

- **De Morganova zakona:**

$$\neg(A \wedge B) \;\sim\; \neg A \vee \neg B \qquad\qquad \neg(A \vee B) \;\sim\; \neg A \wedge \neg B$$

- **kontrapozicija:**

$$A \Rightarrow B \;\sim\; \neg B \Rightarrow \neg A \;\sim\; \neg A \vee B$$

- **ekvivalenca:**

$$\begin{aligned} A \Leftrightarrow B &\sim (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) \\ &\sim (\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B) \\ &\sim (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B) \end{aligned}$$

Zgled: Pokažimo z izpeljavo, da je $p \Rightarrow q \;\sim\; \neg q \Rightarrow \neg p$ takole:

$$p \Rightarrow q \;\sim\; \neg p \vee q \;\sim\; \neg p \vee \neg\neg q \;\sim\; \neg\neg q \vee \neg p \;\sim\; \neg q \Rightarrow \neg p\,.$$

Naloga 5 *Pokaži z izpeljavo, da je izjava*

$$p \wedge (p \Rightarrow q) \wedge (\neg r \Rightarrow \neg q) \Rightarrow r$$

tavtologija.

Naloga 6 *Preveri zakon asociativnosti za implikacijo:*

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r \;\sim\; p \Rightarrow (q \Rightarrow r)?$$

Izbrane oblike izjav

Najprej bomo poskusili odgovoriti na naslednje vprašanje:

Vprašanje 2 *Kako za predpisano resničnostno tabelo poiščemo ustrezno izjavo?*

Naj $A(p)$ pomeni, da je vrednost (sestavljene) izjave A lahko odvisna od vrednosti enostavne izjave oz. spremenljivke p. Naj bosta $A(0)$ in $A(1)$ izjavi, ki ju dobimo, če v izjavi A zamenjamo vse nastope spremenljivke p z 0 oziroma 1.

Trditev 2 *Velja,*

$$A(p) \quad \sim \quad (p \wedge A(1)) \;\vee\; (\neg p \wedge A(0))\,.$$

Dokaz. Enostavna izjava p ima lahko le dve vrednosti 0 in 1, zato obravnavamo ti dve možnosti ločeno.

Če je $p \sim 0$, potem je desna stran

$$0 \wedge A(1) \vee \neg 0 \wedge A(0) \;\sim\; 0 \vee 1 \wedge A(0) \;\sim\; 1 \wedge A(0) \;\sim\; A(0)\,.$$

Podobno za $p \sim 1$, dobimo

$$1 \wedge A(1) \vee \neg 1 \wedge A(0) \;\sim\; A(1) \vee 0 \wedge A(0) \;\sim\; A(1) \vee 0 \;\sim\; A(1)\,.$$

V obeh primerih je izjava na desni strani enakovredna izjavi na levi strani. S tem je trditev dokazana. $\square$

Vprašanje 3 *Kako zgornjo trditev posplošimo na primer dveh enostavnih izjav p in q,*

$A(p, q) \;= ?$

Zgled: Recimo da imamo predpisano spodnjo tabelo. Poiščimo A.

p	q	A
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Če je A odvisna od n enostavnih izjav $p_1, p_2, \ldots, p_n$, potem A zapišemo takole

$$
\begin{array}{rlcrcrcccrcr}
\multicolumn{12}{l}{A(p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n) \;\sim} \\
 & A(1,1,\ldots,1,1) & \wedge & p_1 & \wedge & p_2 & \wedge \cdots & \wedge & & p_{n-1} & \wedge & p_n \\
\vee & A(1,1,\ldots,1,0) & \wedge & p_1 & \wedge & p_2 & \wedge \cdots & \wedge & & p_{n-1} & \wedge & \neg p_n \\
\vee & A(1,1,\ldots,0,1) & \wedge & p_1 & \wedge & p_2 & \wedge \cdots & \wedge & & \neg p_{n-1} & \wedge & p_n \\
\vee & A(1,1,\ldots,0,0) & \wedge & p_1 & \wedge & p_2 & \wedge \cdots & \wedge & & \neg p_{n-1} & \wedge & \neg p_n \\
\vdots & \vdots & & & & & & \vdots & & & \vdots & \\
\vee & A(0,0,\ldots,0,1) & \wedge & \neg p_1 & \wedge & \neg p_2 & \wedge \cdots & \wedge & & \neg p_{n-1} & \wedge & p_n \\
\vee & A(0,0,\ldots,0,0) & \wedge & \neg p_1 & \wedge & \neg p_2 & \wedge \cdots & \wedge & & \neg p_{n-1} & \wedge & \neg p_n
\end{array}
$$

Zgornja zveza nam poda postopek, kako lahko poljubno izjavo (podano s tabelo) zapišemo v povezavi z $\neg$, $\wedge$, $\vee$. Od tukaj sklepamo da velja:

Izrek 3 *Vsaka izjava se da zapisati samo z vezniki $\neg$, $\wedge$, $\vee$ ter enostavnimi izjavami od katerih je odvisna.*

Disjunktivna normalna oblika - DNO

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

Zgled: $p \wedge q$, $p \wedge \neg q \wedge r$ so osnovne konjunkcije; izjava $p \wedge (q \vee r)$ pa ni.

Disjunktivna normalna oblika (krajše **DNO**) izjave A je enakovredni izjavni izraz, ki je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Zgled: Izraz $\neg p \wedge q \ \vee \ p \wedge q$ je DNO za izjavo A iz tabele:

p	q	A
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Kako naredimo DNO

DNO za s tabelo podano izjavo A zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, priredimo eno osnovno konjunkcijo spremenljivk in/ali njihovih negacij glede na to ali je ustrezni nastop 1 oz. 0. Na koncu naredimo disjunkcijo izbranih osnovnih konjunkcij.

Zgled: Poiščimo DNO za izjavo A iz tabele:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Opazimo, da je A resnična v 2., 4., 5., 6. ter 8. vrstici. Za vsako od teh vrstic vzamemo ustrezno konjunkcijo ter vse te konjunkcije združimo z disjunkcijo ter tako dobimo A. Torej,

$$\begin{aligned} A \sim \quad & (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \\ \vee\ & (\neg p \wedge q \wedge r) \\ \vee\ & (\neg p \wedge q \wedge r) \\ \vee\ & (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ \vee\ & (p \wedge \neg q \wedge r) \\ \vee\ & (p \wedge q \wedge r) \end{aligned}$$

Izrek 4 *Vsak izjavni izraz, ki ni protislovje, ima DNO.*

Konjunktivna normalna oblika - KNO

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

Zgled: $p \vee q$, $p \vee \neg q \vee r$ so osnovne disjunkcije; izjava $p \vee (q \wedge r)$ pa ni.

Konjunktivna normalna oblika (krajše **KNO**) izjave A je enakovredni izjavni izraz, ki je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Zgled: Izraz $p \vee q \quad \wedge \quad \neg p \vee q$ je KNO za izjavo A iz tabele:

p	q	A
0	0	0
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Kako naredimo KNO

KNO za s tabelo podano izjavo A zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A **ne**resničen, priredimo eno osnovno disjunkcijo spremenljivk in/ali njihovih negacij glede na to ali je ustrezni nastop 0 oz. 1. Na koncu naredimo konjunkcijo izbranih osnovnih disjunkcij.

Zgled: Poiščimo KNO za izjavo A iz tabele:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Opazimo, da je A neresnična v 1., 3., ter 7. vrstici. Za vsako od teh vrstic vzamemo ustrezno disjunkcijo, ter vse te disjunkcije združimo s konjunkcijo. Torej,

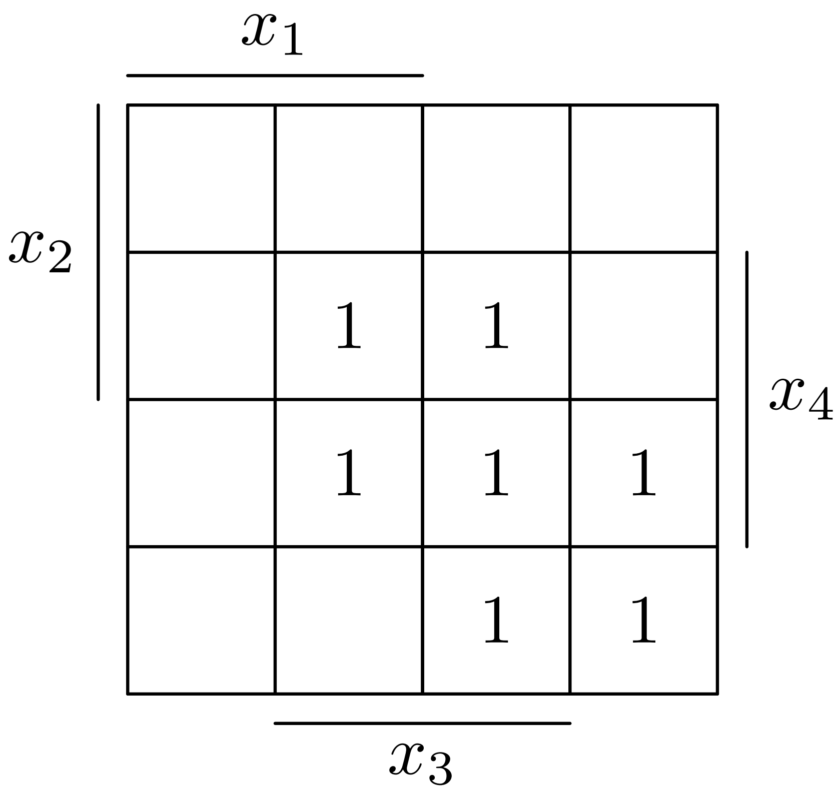
$$\begin{aligned} A \sim \quad & (p \vee q \vee r) \\ \wedge \ & (p \vee \neg q \vee r) \\ \wedge \ & (\neg p \vee \neg q \vee r) \end{aligned}$$

Izrek 5 *Vsak izjavni izraz, ki ni tavtologija, ima KNO.*

Trditev 6 *Velja naslednja zveza*

$$\mathrm{KNO}(A) = \neg\mathrm{DNO}(\neg A)$$

Veitchevi diagrami



Veitchev postopek minimizacije:

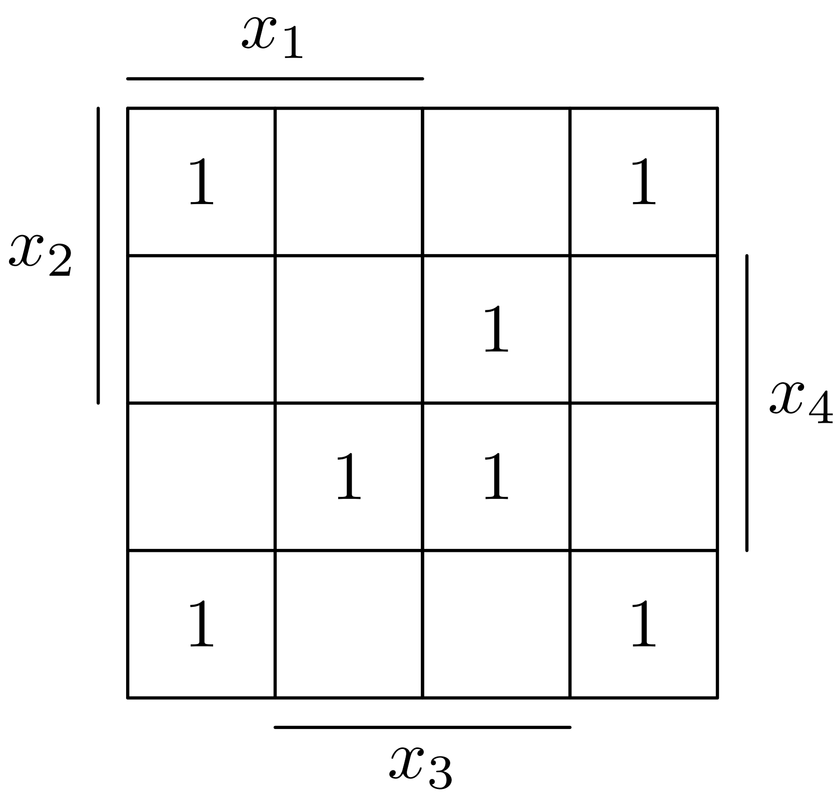
- Resničnostno tabelo napišemo v dvorasežni obliki (na torusu).
- Enojke pokrijemo s pravokotniki, ki vsebujejo 1, 2, 4, 8, 16, ... kvadratkov. Pri tem uporabimo:
  - čim manj pravokotnikov;
  - čim večje pravokotnike.
- Vsak pravokotnik ustreza neki konjunkciji. Dobljene konjunkcije povežemo disjunktivno.

Dobljeno obliko izraza imenujemo **minimalna disjunktivna normalna oblika (MDNO).**

Zgled: Poišči MDNO za izraz podan s tabelo:

p	q	r	F
0	0	0	**1**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**1**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

Zgled: Poišči MDNO za izraz podan z diagramom:



Polni nabori

Množica N izjavnih veznikov je **poln nabor**, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B, ki vsebuje samo veznike iz N.

Zgledi: $\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor po izreku 3.

Ker

$$a \vee b \;\sim\; \neg(\neg a \wedge \neg b)$$

sledi, da je $\{\neg, \wedge\}$ poln nabor.

Podobno, ker

$$a \wedge b \;\sim\; \neg(\neg a \vee \neg b)$$

sledi, da je $\{\neg, \vee\}$ poln nabor.

Kako ugotovimo, da je dani nabor poln?

Trditev 7 *Naj bo Z znan poln nabor izjavnih veznikov in N neka množica izjavnih veznikov. Če lahko vsak veznik iz Z izrazimo samo z vezniki iz N, je tudi N poln nabor.*

Dokaz. Naj bo A poljuben izjavni izraz. Ker je Z poln nabor, obstaja izraz B, ki je enakovreden A ter vsebuje samo veznike iz Z. V B vsak veznik iz Z izrazimo z vezniki iz N, dobimo izraz $C \sim B$. Ker je $C \sim A$, sklepamo, da je N poln nabor. $\square$

Naloga 7 *Pokaži, da sta $\{\neg, \Rightarrow\}$ in $\{0, \Rightarrow\}$ polna nabora.*

Rešitev:

Še trije izjavni vezniki

Stroga (ekskluzivna) disjunkcija $A \oplus B$ oz. $A \veebar B$ oz. A XOR B

Beremo: *bodisi A bodisi B* oz. *natanko ena izmed izjav A in B je resnična*

A	B	$A \oplus B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja: $A \oplus B$ je resnična natanko takrat, ko je $A \Leftrightarrow B$ neresnična.

Velja tudi

$$(A \oplus B) \oplus C \quad \sim \quad A \oplus (B \oplus C)\,.$$

Shefferjev veznik $A \uparrow B$ oz. A NAND B

Beremo: *ne A ali ne B* oz. *vsaj ena od izjav A, B ni resnična*

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja: $A \uparrow B$ je resnična natanko takrat, ko je $A \wedge B$ neresnična.

Lukasiewiczev veznik $A \downarrow B$ oz. A NOR B

Beremo: *niti A niti B* oz. *nobena od izjav A, B ni resnična*

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Velja: $A \downarrow B$ je resnična natanko takrat, ko je $A \vee B$ neresnična.

Dogovor o prednosti veznikov $\oplus$, $\uparrow$ ter $\downarrow$

- Ekskluzivna disjunkcija $\oplus$ veže tako močno kot navadna disjunkcija $\vee$;
- Shefferjev in Lukasiewiczev veznik vežeta enako močno kot konjunkcija $\wedge$.

Zgledi: Izraz

$$A \vee B \oplus C \vee D$$

identificiramo z

$$((A \vee B) \oplus C) \vee D\,.$$

Izraz

$$A \uparrow B \wedge C \downarrow D \uparrow E$$

pa pomeni isto kot

$$(((A \uparrow B) \wedge C) \downarrow D) \uparrow E\,.$$

Izrek 8 *$\{\uparrow\}$ in $\{\downarrow\}$ sta polna nabora izjavnih veznikov.*

Dokaz. Pokažimo najprej, da je $\{\uparrow\}$ poln nabor. Spomnimo se, da je $A \uparrow B \;\sim\; \neg(A \wedge B)$.

Vemo, da je $\{\neg, \wedge\}$ poln nabor. Zato bo dovolj, če izrazimo $\neg$ in $\wedge$ s $\uparrow$.
Negacijo izpeljemo takole

$$A \uparrow A \sim \neg(A \wedge A) \sim \neg A\,.$$

Ker je

$$\neg(A \uparrow B) \sim \neg\neg(A \wedge B) \sim A \wedge B,$$

konjunkcijo zapišemo takole:

$$A \wedge B \sim (A \uparrow B) \uparrow (A \uparrow B).$$

Zdaj se lotimo nabora $\{\downarrow\}$ podobno kot $\{\uparrow\}$. Vemo, da je $\{\neg, \vee\}$ poln nabor. Zato bo dovolj, če izrazimo $\neg$ in $\vee$ z $\downarrow$.
Negacijo izpeljimo takole

$$A \downarrow A \sim \neg(A \vee A) \sim \neg A\,.$$

Ker je

$$\neg(A \downarrow B) \sim \neg\neg(A \vee B) \sim A \vee B\,,$$

disjunkcijo zapišemo takole:

$$A \vee B \sim (A \downarrow B) \downarrow (A \downarrow B)\,.$$

$\square$

Trditev 9 *Nabor* $\{\wedge, \Rightarrow\}$ *ni poln.*

Dokaz. Uporabimo naslednjo lastnost: če imata spremenljivki p in q vrednost 1, potem imata vrednost 1 tudi izjavi $p \wedge q$ ter $p \Rightarrow q$. Naj bo sedaj $A(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ poljuben izjavni izraz, v katerem nastopata kot izjavna veznika samo $\wedge$ in $\Rightarrow$. Po omenjeni lastnosti, velja $A(1, 1, \ldots, 1) \sim 1$.

Iz tega sledi, da izjave B za katero velja $B(1, 1, \ldots, 1) \sim 0$ ni možno zapisati v naboru $\{\wedge, \Rightarrow\}$. $\square$

Naloga 8 *Pokaži, da nabor* $\{\neg, \Leftrightarrow\}$ *ni poln.*

Naloga 9 *V naboru* $\{\downarrow\}$ *zapiši izjave*

$$p \Rightarrow q \wedge r \quad \textit{in} \quad p \Rightarrow q \Rightarrow r\,.$$

Sklepanje

Zgled: Ali je spodnji sklep pravilen?

$A.1$	Ta žival ima krila ali pa ni ptič.
$A.2$	Če je ta žival ptič, potem leže jajca.
$A.3$	Ta žival nima kril!
$B.$	Torej ta žival ne leže jajc.

Formalizirajmo sklep tako, da vpeljemo naslednje spremenljivke:

- $p \equiv$ ta žival ima krila;
- $q \equiv$ ta žival je ptič;
- $r \equiv$ ta žival leže jajca.

Končno lahko sklep zapišemo v izjavnem računu takole:

$$\begin{array}{ll} A1. & p \vee \neg q \\ A2. & q \Rightarrow r \\ A3. & \neg p \\ \hline B. & \neg r \end{array}$$

Zgornji sklep je veljaven, če velja: kadar so vse predpostavke A_1, A_2, A_3 resnične, je resničen tudi zaključek B.

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \ldots, A_n, B$ je **pravilen sklep** s **predpostavkami** $A_1, A_2, \ldots, A_n$ in **zaključkom** B, če je zaključek resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse prepodstavke.

Pišemo:

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \;\models\; B$$

in beremo:

Iz predpostavk A_1, A_2, ..., A_n logično sledi zaključek B.

Zgled: Preverimo sklep

$$p \vee \neg q,\; r \Rightarrow q,\; \neg p \;\models\; \neg r$$

p	q	r	$p \vee \neg q$	$r \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg r$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Naslednji izrek nam prevede problem sklepanja na problem ugotavljanja tavtologije.

Izrek 10 *Sklep*

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \;\models\; B$$

velja natanko tedaj, ko

$$\models A_1 \,\wedge\, A_2 \wedge \cdots \wedge A_n \Rightarrow B$$

Dokaz. Naj bo $\mathcal{A} = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$. Najprej predpostavimo, da je sklep veljaven. Iz definicije veljavnosti sklepa izhaja: če je zaključek B lažen, potem je lažna vsaj ena od predpostavk A_i. Torej v tem primeru

$$\mathcal{A} \Rightarrow B \;\sim\; 0 \Rightarrow 0 \;\sim\; 1\,.$$

V nasprotnem primeru, ko je zaključek B resničen, pa vedno velja

$$\mathcal{A} \Rightarrow B \;\sim\; \mathcal{A} \Rightarrow 1 \;\sim\; 1\,.$$

Tako pridemo do zaključka, da je izjava $\mathcal{A} \Rightarrow B$ tavtologija.

Zdaj pokažimo izrek v drugo smer. Naj bo $\models \mathcal{A} \Rightarrow B$ in naj bodo vse predpostavke A_i resnične. Tedaj je resnična tudi izjava $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A} \Rightarrow B \;\sim\; 1$ sledi, da je $B \;\sim\; 1$. To pa pomeni, da je sklep $\mathcal{A} \;\models\; B$ veljaven. □

Zgled: Po izreku sledi, da je naš sklep

$$p \vee \neg q,\, r \Rightarrow q,\, \neg p \;\models\; \neg r$$

pravilen natanko takrat, ko je izjava

$$(p \vee \neg q) \wedge (r \Rightarrow q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg r$$

tavtologija.

Pravila sklepanja

$A,\ A \Rightarrow B \ \models \ B$	**modus ponens (MP)**
$A \Rightarrow B,\ \neg B \ \models \ \neg A$	**modus tollens (MT)**
$A \vee B,\ \neg B \ \models \ A$	**disjunktivni silogizem (DS)**
$A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \ \models \ A \Rightarrow C$	**hipotetični silogizem (HS)**
$A,\ B \ \models \ A \wedge B$	**združitev (Zd)**
$A \wedge B \ \models \ A$	**poenostavitev (Po)**
$A \ \models \ A \vee B$	**pridružitev (Pr)**

Zgled: Preverimo veljavnost sklepa (HS)

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$B \Rightarrow C$	$A \Rightarrow C$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Dokazovanje pravilnosti sklepov

Pravilnost sklepa

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n\ \models\ B$$

lahko dokažemo tudi tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov

$$C_1,\ C_2,\ C_3, \ldots, C_{m-1}, C_m$$

kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, \ldots, m$ velja:

(a) C_i je ena od predpostavk; ali

(b) C_i je tavtologija; ali

(c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju; ali

(d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov v zaporedju po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled: Dokažimo naslednji sklep:

$$p \Rightarrow q,\ p \vee r,\ q \Rightarrow s,\ r \Rightarrow t,\ \neg s \ \models \ t\,.$$

1.	$p \Rightarrow q$	predpostavka
2.	$p \vee r$	predpostavka
3.	$q \Rightarrow s$	predpostavka
4.	$r \Rightarrow t$	predpostavka
5.	$\neg s$	predpostavka
6.	$p \Rightarrow s$	HS$(1, 3)$
7.	$\neg p$	MT$(6, 5)$
8.	r	DS$(2, 7)$
9.	t	MP$(4, 8)$

Kako pokažemo, da sklep NI pravilen?

Poiščimo protiprimer, t.j. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Zgled: Preverimo veljavnost začetnega sklepa o ptičih, jajcih in krilih:

$$p \vee \neg q,\ q \Rightarrow r,\ \neg p \ \models\ \neg r$$

p	q	r	$p \vee \neg q$	$q \Rightarrow r$	$\neg p$	$\neg r$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

Pomožni sklepi

Pogojni sklep (PS)

Pogojni sklep uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Trditev 11 *Sklep*

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \;\models\; B \Rightarrow C$$

velja natanko tedaj, ko velja sklep

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\, B \;\models\; C\,.$$

Dokaz. Označimo $\mathcal{A} = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$. Zadošča pokazati, da je

$$\models \mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C)$$

natanko tedaj, ko je

$$\models \mathcal{A} \wedge B \Rightarrow C\,.$$

To pa je res, saj velja

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \Rightarrow (B \Rightarrow C) \quad &\sim \quad \neg\mathcal{A} \vee (\neg B \vee C) \\ &\sim \quad (\neg\mathcal{A} \vee \neg B) \vee C \\ &\sim \quad \neg(\mathcal{A} \wedge B) \vee C \\ &\sim \quad (\mathcal{A} \wedge B) \Rightarrow C \end{aligned}$$

□

Zgled: S pomočjo pogojnega sklepa dokažimo naslednji sklep

$$p \Rightarrow q \vee r, \neg r \models p \Rightarrow q\,.$$

1.	$p \Rightarrow q \vee r$	predpostavka
2.	$\neg r$	predpostavka
3.1.	$\quad p$	predpostavka PS
3.2.	$\quad q \vee r$	MP$(1, 3.1)$
3.3.	$\quad q$	DS$(3.2, 2)$
3.	$p \Rightarrow q$	PS$(3.1, 3.3)$

Sklepanje s protislovjem - reduction ad absurdum (RA)

Sklepanje s protislovjem lahko uporabimo kadarkoli.

Trditev 12 *Sklep*

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n \;\models\; B$$

velja natanko tedaj, ko velja sklep

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\, \neg B \;\models\; 0\,.$$

Dokaz. Kot prej naj bo $\mathcal{A} = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$. Zadošča pokazati, da je

$$\models \mathcal{A} \Rightarrow B$$

natanko tedaj, ko je

$$\models \mathcal{A} \wedge \neg B \Rightarrow 0\,.$$

To pa je res, saj velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \wedge \neg B \;\Rightarrow\; 0 \quad &\sim \quad \neg(\mathcal{A} \wedge \neg B) \vee 0 \\
&\sim \quad \neg\mathcal{A} \vee B \\
&\sim \quad \mathcal{A} \Rightarrow B\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Zgled: S pomočjo RA dokažimo naslednji sklep:

$$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r),\ (s \wedge q) \Rightarrow r,\ s \ \models\ \neg p\,.$$

1.	$p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$	predpostavka
2.	$(s \wedge q) \Rightarrow r$	predpostavka
3.	s	predpostavka
4.1.	$\quad \neg\neg p$	predpostavka(RA)
4.2.	$\quad p$	~ 4.1
4.3.	$\quad \neg(q \Rightarrow r)$	$\mathrm{MP}(1, 4.2)$
4.4.	$\quad q \wedge \neg r$	~ 4.3
4.5.	$\quad q$	$\mathrm{Po}(4.4)$
4.6.	$\quad \neg r$	$\mathrm{Po}(4.4)$
4.7.	$\quad s \wedge q$	$\mathrm{Zd}(3, 4.5)$
4.8.	$\quad r$	$\mathrm{MP}(2, 4.7)$
4.9.	$\quad 0$	$\mathrm{Zd}(4.8, 4.6)$
4.	$\neg p$	$\mathrm{RA}(4.1, 4.9)$

Zgled: S pomočjo RA dokažimo naslednji sklep:

> Če nočem jutri zamuditi pouka, moram zgodaj vstati; če pa grem nocoj na žur, se bom vrnil pozno. Če se bom pozno vrnil in zgodaj vstal, bom spal le 5 ur. Ne morem si privoščiti samo 5 ur spanja. Potemtakem bom moral zamuditi pouk ali pa se odpovedati žuru.

Označimo enostavne izjave, ki nastopajo v sklepu, takole:

- $p \equiv$ jutri ne bom zamudil pouka;
- $q \equiv$ zjutraj bom zgodaj vstal;
- $r \equiv$ nocoj grem na žur;
- $s \equiv$ nocoj se bom pozno vrnil;
- $t \equiv$ spal bom le 5 ur.

Potem sklep zapišemo takole:

$$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s),\ (s \wedge q) \Rightarrow t,\ \neg t \ \models\ \neg(p \wedge r)\,.$$

1.	$(p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s)$	predpostavka
2.	$(s \wedge q) \Rightarrow t$	predpostavka
3.	$\neg t$	predpostavka
4.1.	$\quad p \wedge r$	predpostavka(RA)
4.2.	$\quad p$	Po(4.1)
4.3.	$\quad p \Rightarrow q$	Po(1)
4.4.	$\quad q$	Mp(4.2, 4.3)
4.5.	$\quad r$	Po(4.1)
4.6.	$\quad r \Rightarrow s$	Po(1)
4.7.	$\quad s$	Mp(4.5, 4.6)
4.8.	$\quad s \wedge q$	Zd(4.4, 4.7)
4.9.	$\quad t$	MP(2, 4.8)
4.10.	$\quad \neg t \wedge t \sim 0$	Zd(3, 4.9)
4.	$\neg(p \wedge r)$	RA(4.1, 4.10)

Analiza primerov (AP)

Analizo primerov uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Trditev 13 *Sklep*

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\, B_1 \vee B_2 \;\models\; C$$

velja natanko tedaj, ko veljata oba sklepa

$$A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\, B_1 \;\models\; C \quad \textit{in} \quad A_1,\, A_2,\, \ldots,\, A_n,\, B_2 \;\models\; C\,.$$

Dokaz. Spet naj bo $\mathcal{A} = A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n$. Zadošča pokazati, da je

$$\models \mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2) \Rightarrow C$$

natanko tedaj, ko je

$$\models \mathcal{A} \wedge B_1 \Rightarrow C \quad \text{in} \quad \models \mathcal{A} \wedge B_2 \Rightarrow C\,.$$

oziroma, ko je

$$\models (\mathcal{A} \wedge B_1 \Rightarrow C) \;\wedge\; (\mathcal{A} \wedge B_2 \Rightarrow C)\,.$$

To pa velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2) \Rightarrow C &\sim \neg(\mathcal{A} \wedge (B_1 \vee B_2)) \vee C \\
&\sim \neg(\mathcal{A} \wedge B_1 \vee \mathcal{A} \wedge B_2) \vee C \\
&\sim (\neg(\mathcal{A} \wedge B_1) \wedge \neg(\mathcal{A} \wedge B_2)) \vee C \\
&\sim (\neg(\mathcal{A} \wedge B_1) \vee C) \wedge (\neg(\mathcal{A} \wedge B_2)) \vee C) \\
&\sim (\mathcal{A} \wedge B_1 \Rightarrow C) \wedge (\mathcal{A} \wedge B_2 \Rightarrow C)\,.
\end{aligned}$$

□

Zgled: S pomočjo AP dokažimo naslednji sklep:

$$p \Rightarrow r,\, q \Rightarrow r,\, p \vee q \models\; r\,.$$

1.	$p \Rightarrow r$	predpostavka
2.	$q \Rightarrow r$	predpostavka
3.	$p \vee q$	predpostavka
4.1.1.	$\quad p$	predpostavka AP
4.1.2.	$\quad r$	$\mathrm{MP}(1, 4.1.1)$
4.2.1.	$\quad q$	predpostavka AP
4.2.2.	$\quad r$	$\mathrm{MP}(2, 4.2.1)$
4.	r	$\mathrm{AP}(3, 4.1.2, 4.2.2)$

Opomba. Analizo primerov lahko posplošimo na disjunkcijo večih členov takole:

Trditev 14 *Sklep*

$$\mathcal{A}, B_1 \vee B_2 \vee \cdots \vee B_m \;\models\; C$$

velja natanko tedaj, ko velja vsak od sklepov

$$\mathcal{A}, B_1 \;\models\; C \quad \mathit{in} \quad \mathcal{A}, B_2 \;\models\; C \quad \mathit{in} \;\cdots\; \mathit{in} \quad \mathcal{A}, B_m \;\models\; C\,.$$

Opomba. Analiza primerov je zelo priročna, kadar imamo dve ali več predpostavk disjunkcije. Velja namreč tole:

Trditev 15 *Sklep*

$$\mathcal{A}, B_1 \vee B_2, C_1 \vee C_2 \ \models \ D$$

velja natanko tedaj, ko velja vsak od štirih sklepov

$$\mathcal{A}, B_1, C_1 \ \models \ D\,, \qquad \mathcal{A}, B_1, C_2 \ \models \ D\,,$$
$$\mathcal{A}, B_2, C_1 \ \models \ D\,, \qquad \mathcal{A}, B_2, C_2 \ \models \ D\,.$$