Množice[1]

Množica je združitev določenih različnih objektov v neko skupino ali zbirko. Te objekte imenujemo **elementi** množice.

Izjavo "*a je element množice A*" zapišemo $a \in A$. Podobno $a \notin A$ pomeni "*a ni element množice A*".

Množica je lahko podana z

- **naštevanjem**, recimo $A = \{a, b, e, f, \ldots\}$
- **izjavno formulo**, recimo $A = \{x\,;\, \phi(x)\}$. Pri tem je $\phi(x)$ izjavna formula, ki ne vsebuje prostih nastopov spremenljivk, razen x.

Zgledi: Obravnavajmo naslednje množice

- $\{x;\, x \neq x\}$;
- $\{x;\, x \in \mathbb{Z} \wedge \exists y : (y \in \mathbb{Z} \wedge x = 2 \cdot y)\}$;
- $\{x;\, x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\}$.

Russellova množica:

$$R = \{x;\, x \notin x\}$$

[1](zadnji update 20. novembra)

Enakost, inkluzija in stroga inkluzija

Definirajmo **enakost**, **inkluzijo** ter **strogo inkluzijo** množic:

$$
\begin{aligned}
A = B \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\
A \subseteq B \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \\
A \subset B \quad &\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge \ A \neq B
\end{aligned}
$$

Če velja $A \subseteq B$, rečemo, da je A **podmnožica** množice B. Če pa velja $A \subset B$, rečemo, da je A **prava podmnožica** množice B.

Trditev 1 *Velja*

$$A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B \wedge B \subseteq A\,.$$

Dokaz. Izpeljavo naredimo takole:

$$
\begin{aligned}
A = B \quad &\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \Leftrightarrow x \in B) \\
&\Leftrightarrow \quad \forall x : (x \in A \Rightarrow x \in B) \wedge \forall x : (x \in B \Rightarrow x \in A) \\
&\Leftrightarrow \quad A \subseteq B \ \wedge \ B \subseteq A.
\end{aligned}
$$

$\square$

Osnovne operacije z množicami

Unija $A \cup B = \{x\,;\, x \in A \vee x \in B\}$

Presek $A \cap B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \in B\}$

Razlika $A \setminus B = \{x\,;\, x \in A \wedge x \notin B\}$

Lastnosti osnovnih operacij:

- **idempotentnost:** $$\begin{aligned} A \cup A &= A \\ A \cap A &= A \end{aligned}$$

- **komutativnost:** $$\begin{aligned} A \cup B &= B \cup A \\ A \cap B &= B \cap A \end{aligned}$$

- **asociativnost:** $$\begin{aligned} (A \cup B) \cup C &= A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C &= A \cap (B \cap C) \end{aligned}$$

- **absorpcija:** $$\begin{aligned} A \cup (A \cap B) &= A \\ A \cap (A \cup B) &= A \end{aligned}$$

- **distributivnost:** $$\begin{aligned} A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C) \end{aligned}$$

Lastnosti z inkluzijo:

1. $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$
2. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad A \cup C \subseteq B \cup C$
3. $A \subseteq B \quad \Rightarrow \quad A \cap C \subseteq B \cap C$

Prazna množica in univerzalna množica

Prazna množica je množica, ki ne vsebuje nobenega elementa; označimo jo z $\emptyset$.

Zgledi:

- $\{\emptyset\} \neq \emptyset$
- $\{\{\emptyset\}\} \neq \{\emptyset\}$

Pri uporabah teorije množic nas ponavadi zanimajo elementi ter podmnožice neke izbrane oz. vnaprej določene množice $\mathcal{S}$. Tej množici rečemo **univerzalna množica**.

Lastnosti: Naj bo A poljubna množica. Potem velja

1. $\emptyset \subseteq A \subseteq \mathcal{S}$
2. $\emptyset \cup A = A$ in $\emptyset \cap A = \emptyset$
3. $\mathcal{S} \cup A = \mathcal{S}$ in $\mathcal{S} \cap A = A$
4. $A \setminus \emptyset = A$ in $A \setminus \mathcal{S} = \emptyset$

Množici A, B sta **disjunktni**, če je $A \cap B = \emptyset$.

Zgled: Prazna množica $\emptyset$ je disjunktna z vsako množico. Univerzalna množica $\mathcal{S}$ je disjunktna samo s prazno.

Komplement množic

Komplement množice definiramo kot:

$$A^c \ = \ \mathcal{S} \setminus A$$

Lastnosti:

1. $(A^c)^c = A$
2. $A \cup A^c = \mathcal{S} \quad \text{in} \quad A \cap A^c = \emptyset$
3. De Morganova zakona:
$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \quad \text{in} \quad (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$
4. $A \setminus B = A \cap B^c$
5. $\emptyset^c = \mathcal{S} \quad \text{in} \quad \mathcal{S}^c = \emptyset$
6. $A \subseteq B \quad \Leftrightarrow \quad B^c \subseteq A^c$
7. $A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \subseteq B^c \quad \Leftrightarrow \quad B \subseteq A^c.$

Vsota množic

Vsoto oz. **simetrično razliko** množic definiramo takole:

$$A + B \quad \equiv \quad (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Lastnosti:

1. $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$
2. $A + \emptyset = A$
3. $A + A = \emptyset$
4. $A + A^c = \mathcal{S}$
5. $A + B = B + A$
6. $(A + B) + C = A + (B + C)$
7. $A + B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A = B$
8. $A \cap B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A + B = A \cup B$
9. $(A + B) \cap C \quad = \quad (A \cap C) + (B \cap C)$

Lastnost 6 nam zagotovi, da lahko vsoto posplošimo takole:

$$A_1 + A_2 + \cdots + A_n \ := \ (\cdots((A_1 + A_2) + A_3) + \cdots + A_n)$$

Vprašanje 1 *Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ množice. Poišči potreben in zadosten pogoj, da bi bil nek element x vsebovan v vsoti $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$?*

Naloga 1 *Dokaži 9. lastnost!*

Enačbe z množicami

Zgled: Kdaj so enačbe rešljive:

1. $X \cup A = B$;
2. $X \cap A = B$;
3. $X + A = B$;

Zgled: Poišči vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} X \cup A &= B \\ X \cap A &= C \end{aligned}$$

kjer so A, B, C dane množice. Kdaj je sistem rešljiv?

Postopek za reševanje sistema enačb z neznano množico

Zgled: Poišči vse rešitve sistema enačb

$$\begin{aligned} A \cap X &= B \setminus X \\ C \cup X &= X \setminus A \end{aligned}$$

kjer so A, B, C dane množice. Kdaj je sistem rešljiv?

Korak 1. *Vse člene prenesemo na levo stran enačb z uporabo ekvivalence:*

$$P = Q \qquad \Leftrightarrow \qquad P + Q = \emptyset$$

oz. vsaki enačbi na obeh straneh prištejemo njeno desno stran.

Torej,

$$\begin{aligned} A \cap X \;+\; B \setminus X &= \emptyset \\ C \cup X \;+\; X \setminus A &= \emptyset\,. \end{aligned}$$

Korak 2. *Vse enačbe združimo v eno samo z uporabo ekvivalence*

$$P = \emptyset \quad \text{in} \quad Q = \emptyset \qquad \Leftrightarrow \qquad P \cup Q = \emptyset\,.$$

Pri našem zgledu je to:

$$(A \cap X + B \setminus X) \cup (C \cup X + X \setminus A) = \emptyset\,.$$

Korak 3. *Vse operacije izrazimo z* $\cup$, $\cap$, ^{c}*:*

$$
\begin{aligned}
P \setminus Q &= P \cap Q^c \\
P + Q &= (P \cap Q^c) \cup (Q \cap P^c)
\end{aligned}
$$

Z uporabo de Morganovih zakonov in distributivnosti levo stran enačbe zapišemo v obliki unije presekov danih množic, neznane množice ter njihovih komplementov ("DNO").

Pri našem zgledu dobimo,

$$
\begin{gathered}
(A \cap X \cap (B \cap X^c)^c) \ \cup \ (B \cap X^c \cap (A \cap X)^c) \ \cup \\
((C \cup X) \cap (X \cap A^c)^c) \ \cup \ (X \cap A^c \cap (C \cup X)^c) \ = \ \emptyset
\end{gathered}
$$

in od tukaj

$$
\begin{gathered}
(A \cap X \cap (B^c \cup X)) \ \cup \ (B \cap X^c \cap (A^c \cup X^c)) \ \cup \\
((C \cup X) \cap (X^c \cup A)) \ \cup \ \ (X \cap A^c \cap C^c \cap X^c) \ \ = \ \emptyset \, .
\end{gathered}
$$

Uporabimo absorpcijo ter druge zakone, da poenostavimo takole:

$$
(A \cap X) \cup (B \cap X^c) \cup (C \cap X^c) \cup (C \cap A) = \emptyset \, .
$$

Korak 4. *Vsak presek oblike $P_1 \cap P_2 \cap \cdots P_n$, kjer so P_i znane množice ali njihovi komplementi, nadomestimo s*

$$(P_1 \cap P_2 \cap \cdots P_n \cap X) \cup (P_1 \cap P_2 \cap \cdots P_n \cap X^c) \,.$$

S tem dosežemo, da v vsakem preseku nastopa bodisi X bodisi X^c.

V našem primeru dobimo

$$(A\cap X)\cup(B\cap X^c)\cup(C\cap X^c)\cup(C\cap A\cap X)\cup(C\cap A\cap X^c) = \emptyset,$$

s pomočjo absorpcije pa poenostavimo

$$(A \cap X) \cup (B \cap X^c) \cup (C \cap X^c) = \emptyset.$$

Korak 5. *Izpostavimo X in X^c in s tem enačbo prevedemo v obliko:*

$$(P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset \,.$$

Od tod hitro dobimo:

$$\begin{aligned} (P \cap X) \cup (Q \cap X^c) = \emptyset \quad & \Leftrightarrow \quad P \cap X = \emptyset \;\; \textit{in} \;\; Q \cap X^c = \emptyset \\ & = \quad Q \subseteq X \subseteq P^c \,. \end{aligned}$$

Torej rešitev obstaja le, če je $Q \subseteq P^c$ oziroma $Q \cap P = \emptyset$.

V našem primeru dobimo

$$(A \cap X) \cup ((B \cup C) \cap X^c) = \emptyset.$$

Odgovor: Naš sistem ima rešitev natanko tedaj, ko je $A\cap(B\cup C) = \emptyset$. Tedaj je rešitev vsaka množica X, za katero velja:

$$B \cup C \;\subseteq\; X \;\subseteq\; A^c.$$

Potenčna množica

Potenčna množica dane množice A je

$$\mathcal{P}(A) = \{X\,;\, X \subseteq A\}$$

Zgledi:

- $\mathcal{P}(\{a,b,c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$
- $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
- $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

Naloga 2 *Izračunaj* $\mathcal{P}^3(\emptyset)$*. Koliko elementov ima množica* $\mathcal{P}^5(\emptyset)$*?*

Za potenčno množico velja:

- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
- $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
- $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$

Družine množic

Naj bo $\mathcal{M} = \{A, B, C, \ldots\}$ družina množic. Pojem **unija** in **presek** lahko razširimo na družine množic takole:

Unija družine $\mathcal{M}$ je

$$\bigcup_{Y \in \mathcal{M}} Y = \{x \,;\, \exists Y \in \mathcal{M} : x \in Y\}$$

Presek družine $\mathcal{M}$ je

$$\bigcap_{Y \in \mathcal{M}} Y = \{x \,;\, \forall Y \in \mathcal{M} : x \in Y\}$$

Včasih uporabimo okrajšavo

$$\cup \mathcal{M} = \bigcup_{Y \in \mathcal{M}} Y \quad \text{in} \quad \cap \mathcal{M} = \bigcap_{Y \in \mathcal{M}} Y$$

Pogosto uporabljamo **indeksno obliko**. Naj bo $\mathcal{I}$ indeksna množica ter

$$\mathcal{M} = \{A_i \,;\, i \in \mathcal{I}\}\,.$$

Potem je

$$\cup \mathcal{M} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i \quad \text{in} \quad \cap \mathcal{M} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\,.$$

Zgled:

$$\bigcup_{i\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = (0,1] \qquad \text{in} \qquad \bigcap_{i\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n}, 1\right] = \{1\}$$

Veljata posplošeni distributivnosti:

$$B \cap \left(\bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) \quad = \quad \bigcup_{i\in\mathcal{I}} (B \cap A_i)$$

in

$$B \cup \left(\bigcap_{i\in\mathcal{I}} A_i\right) \quad = \quad \bigcap_{i\in\mathcal{I}} (B \cup A_i)\,.$$

Pokritja in razbitja

Družina podmnožic $\mathcal{M} = \{A_i\,;\, i \in \mathcal{I}\}$ množice A je **pokritje množice** A, če je

$$A = \bigcup_{i\in\mathcal{I}} A_i\,.$$

Družina podmnožic $\mathcal{M} = \{A_i\,;\, i \in \mathcal{I}\}$ množice A je **razbitje** oz. **particija** množice A, če velja:

1. $\mathcal{M}$ je pokritje množice A;
2. elementi iz $\mathcal{M}$ so neprazni;
3. elementi iz $\mathcal{M}$ so paroma disjunktni, tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ za poljubna dva indeksa $i, j \in \mathcal{I}$.

Urejeni pari in n-terice

Vemo, da je 2-elementna množica $\{x, y\}$ neurejen par, tj. $\{x, y\} = \{y, x\}$.

Urejeni par s 1. komponento x ter 2. komponento y definiramo takole:

$$(x, y) \ = \ \{\{x, y\}, \{x\}\}$$

Trditev 2 (Osnovna lastnost urejenih parov) *Velja:*

$$(x, y) = (u, v) \quad \Leftrightarrow \quad x = u \wedge y = v$$

Dokaz.

Urejeno n-terico definiramo takole

$$(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = (\cdots((a_1, a_2), a_3), \ldots, a_n)$$

Kartezični produkt

Kartezični produkt dveh množic podamo na naslednji način:

$$A \times B = \{(a, b)\,;\, a \in A \text{ in } b \in B\}$$

Zgled:

Lastnosti:

1. Kartezični produkt z unijo:

$$\begin{aligned} A \times (B \cup C) &= (A \times B) \cup (A \times C) \\ (B \cup C) \times A &= (B \times A) \cup (C \times A) \end{aligned}$$

2. Kartezični produkt s presekom:

$$\begin{aligned} A \times (B \cap C) &= (A \times B) \cap (A \times C) \\ (B \cap C) \times A &= (B \times A) \cap (C \times A) \end{aligned}$$

3. $(A \cap B) \times (C \cap D) = (A \times C) \cap (B \times D)$

4. $A = \emptyset \vee B = \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad A \times B = \emptyset$

5. $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \quad \Rightarrow \quad A \times B \subseteq C \times D$

6. $A \times B \subseteq C \times D \wedge A \times B \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad A \subseteq C \wedge B \subseteq D$

7. Naj bo A končna množica z n elementi in B končna množica z m elementi, potem je $A \times B$ končna množica z $n \cdot m$ elementi .

Kartezični produkt n množic podamo takole:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\,;\, a_i \in A_i\}$$