Moč množic

Končne množice

Naj bo A končna množica. Potem z $|A|$ označimo število elementov oz. **moč** množice A.

Končni množici A in B sta **enako močni**, če je $|A| = |B|$. V tem primeru pišemo $A \sim B$.

Zgledi:

- $|\emptyset| = 0$
- $|\{0, 1\}| = 2$
- $|\{\{0, 1\}\}| = 1$
- $|\{\emptyset\}| = 1$

Trditev 1 *Naj bosta A, B končni množici. Potem je $A \sim B$ natanko takrat, kadar obstaja bijektivna preslikava $f : A \to B$.*

Dokaz.

Lastnosti: Naj bodo A, B, C končne množice. Potem velja:

- $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
- $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$
- $|B^A| = |\{f\,;\, f : A \to B\}| = |B|^{|A|}$
- $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$
- Če je $B \subseteq A$, potem $|A \setminus B| = |A| - |B|$
- $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
- Če je $A \cap B = \emptyset$, potem je $|A \cup B| = |A| + |B|$
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Naloga 1 *Koliko je števil na intervalu* $[1, 100]$*, ki so deljiva s* 3*, a niso deljiva s* 5*?*

Rešitev:

Princip vključitve & izključitve

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ končne množice. Potem velja

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| &= |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-1} \cap A_n| \\
&+ |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
&- |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \cdots \\
&\quad \cdots \\
(-1)^{n+1} & |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Kompakten zapis principa: Naj bo

$$S_k = \sum_{\substack{\mathcal{I} \subseteq \{1,2,\ldots,n\} \\ |\mathcal{I}|=k}} |\bigcap A_i|$$

potem

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_i \,.$$

Komplementarna vključitev & izključitev

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \ldots, A_n$ podmnožice A. Definiramo $A_i^c = A \setminus A_i$. Potem velja

$$\begin{aligned}
|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c| \quad & = \quad |A| - |A_1| - |A_2| - \cdots - |A_n| \\
& + \quad |A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + |A_{n-1} \cap A_n| \\
& - \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3| - \cdots - |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n| \\
& + \quad |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| + \cdots \\
& \qquad \ldots \\
& (-1)^n \quad |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned}$$

Kompaktnejši zapis: Postavimo $S_0 = |A|$. Potem je

$$|A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_n^c| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i S_i \, .$$

Neskončne množice

Množici A in B sta **enakomočni**, kadar med njima obstaja bijektivna funkcija $f : A \to B$. Pišemo $A \sim B$.

Zgled: Funkcija $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(z) = \begin{cases} 2z, & z \geq 0 \\ -2z - 1, & z < 0 \end{cases}$$

je bijekcija med $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{N}$. Torej, $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$.

Trditev 2 *Relacija $\sim$ je enakovrednost.*

Dokaz.

Ekvivalenčnim razredom enakovrednosti $\sim$ rečemo **kardinalna števila**. Poljubni množici A ustrezno kardinalno število označimo z $|A|$ oz. $\mathrm{card}(A)$.

Dedekindova definicija. Množica A je **neskončna** natanko tedaj, ko obstaja neka prava podmnožica $B \subset A$ tako, da $A \sim B$. Množica A je **končna** natanko tedaj, ko ni neskončna.

Krajše zapišemo:

$$A \text{ neskončna} \quad \Leftrightarrow \quad \exists B \subset A : A \sim B$$

Zgled: Funkcija $g(x) = x+1$ je bijekcija med $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N} \setminus \{0\}$. Torej, množica naravnih števil $\mathbb{N}$ je neskončna.

Trditev 3 *Naj bo $A \subset B$. Če je A neskončna, potem je tudi B neskončna.*

Dokaz. Ker je množica A neskončna, obstajata $A' \subset A$ in bijekcija $f : A \to A'$. Naj bo $D = A' \cup (B \setminus A)$. Tedaj je $D \subseteq B$ in je preslikava

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A' \\ x & x \in B \setminus A, \end{cases}$$

bijekcija med B in D. Torej je B neskončna. $\square$

Posledica 4 *Vsaka podmnožica končne množice je končna.*

Posledica 5 *Naj bo $f : A \to B$ injektivna preslikava ter A neskončna. Potem je B neskončna.*

Zgledi: Naslednje množice so neskončne:

- $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \cup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\}$
- $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Števna neskončnost

Množica A je **števno neskončna**, kadar je $A \sim \mathbb{N}$. Množica A je **števna**, kadar je končna ali števno neskončna.

Razred števno neskončnih množic označimo z $\aleph_0$ (beri: alef 0)

Zgled: Funkcija $f(m,n) = \binom{n+m+1}{2} + n$ je bijekcija med $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$. Torej, množica $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ je števno neskončna.

Problem 1 *Naj bo Σ končna abeceda ter naj bo Σ^* množica vseh končnih besed na abecedo Σ. Ali velja $\Sigma \sim \mathbb{N}$?*

Problem 2 *Ali je $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$?*

Moč kontinuuma

Izrek 6 (Cantor) *Množica vseh realnih števil na intervalu* $(0,1)$ *ni števno neskončna.*

Dokaz. Preslikava $f : n \mapsto \frac{1}{n+2}$ je injekcija iz $\mathbb{N}$ v $(0,1)$. Torej je $(0,1)$ neskončna množica.

Vsako število $x \in (0,1)$ lahko (enolično) zapišemo kot neskončno decimalno število

$$x = 0\,.\,x_1x_2x_3x_4\ldots$$

Torej, za število $\frac{1}{2}$ izberemo zapis $0.499999\ldots$ in ne zapis $0.50000\ldots$.

Predpostavimo, da je množica $(0,1)$ števna. Potem obstaja bijekcija $f : \mathbb{N} \to (0,1)$. Torej

$$\begin{aligned}
f(0) &= 0.a_0^0a_1^0a_2^0a_3^0a_4^0a_5^0\ldots \\
f(1) &= 0.a_0^1a_1^1a_2^1a_3^1a_4^1a_5^1\ldots \\
f(2) &= 0.a_0^2a_1^2a_2^2a_3^2a_4^2a_5^2\ldots \\
f(3) &= 0.a_0^3a_1^3a_2^3a_3^3a_4^3a_5^3\ldots \\
&\ldots
\end{aligned}$$

Obravnavajmo število

$$b = 0.b_0b_1b_2b_3b_4\ldots,$$

za katerega velja, da je

$$b_i = \begin{cases} 1, & a_i^i \neq 1 \\ 2, & a_i^i = 1\,. \end{cases}$$

Ker je $b \in (0,1)$, obstaja $k \in \mathbb{N}$ za katerega velja, da je $f(k) = b$. Obravnavajmo $b_k \in \{1,2\}$: premisli ali je $b_k = 1$ oz. $b_k = 2$!

$\square$

Zadnji izrek nam implicira naslednjo posledico:

Posledica 7 *Velja*

$$(0,1) \not\sim \mathbb{N}\,.$$

Za množice, ki so enakomočne množici $(0,1)$, rečemo, da imajo moč **kontinuuma**. Ustrezno kardinalno število označimo s $\mathbf{c}$.

Zgledi: Naslednje množice imajo moč kontinuuma:

- (a,b) za $a<b$: $f(x)=a+(b-a)x$ je ustrezna bijekcija med $(0,1)$ in (a,b);
- $\mathbb{R}^+$: ustrezna bijekcija je $f(x)=\frac{x}{1-x}$;
- $\mathbb{R}$: ustrezna bijekcija je $f(x)=\frac{1-2x}{x(1-x)}$.

Relacija $\preceq$

Množica A ima **manjšo ali enako moč** kot B, če obstaja kakšna injekcija $f : A \to B$. Pišemo $A \preceq B$.

Velja:

$$A \subseteq B \;\;\Rightarrow\;\; A \preceq B\,.$$

Definiramo lahko še **strogo manjšo moč**:

$$A \prec B \quad \equiv \quad A \preceq B \;\text{ in }\; A \not\sim B.$$

Izrek 8 (Shröder-Bernsteinov izrek) *Če $A \preceq B$ in $B \preceq A$, potem $A \sim B$.*

Izrek 9 (Izrek o trihotomiji) *Poljubni množici A in B sta primerljivi glede na njuno moč in velja natanko ena izmed možnosti: $A \prec B$ ali $B \prec A$ ali $A \sim B$.*

Trditev 10 *Relacija $\preceq$ je sovisna.*

Dokaz.

Izrek 11 (Izrek o surjekciji) *Za poljubni množici $A \neq \emptyset$ in B velja $A \preceq B$ natanko takrat, ko obstaja surjekcija $g : B \to A$.*

Za dve množici A, B pokažemo, da je $A \sim B$ na naslednje načine:

- poiščemo bijekcijo med njima;
- poiščemo injekcijo v obeh smereh;
- poiščemo surjekcijo v obeh smereh;
- poiščemo injekcijo in surjekcijo v isti smeri;
- pokažemo $A \sim C$ in $B \sim C$.

Naslednji izrek nam pove, da je števna neskončnost najmanjša neskončnost. Na vprašanje: *Ali sta $\aleph_0$ in* $\mathbf{c}$ *edini neskočnosti?* - bomo odgovorili v naslednjem razdelku.

Izrek 12 *Vsaka neskončna množica vsebuje števno neskončno podmnožico.*

Moč potenčne množice

Izrek 13 (Cantor) *Za poljubno množico A velja*

$$A \prec \mathcal{P}(A)$$

Dokaz. Najprej pokažimo, da je $A \preceq \mathcal{P}(A)$. Obravnavajmo preslikavo $g : \mathcal{P}(A) \to A$

$$g(X) = \begin{cases} x & X = \{x\} \\ a & \text{sicer}, \end{cases}$$

kjer je a vnaprej izbran element iz A. Ker za vsak $x \in A$ velja $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$, sklepamo, da je g surjekcija. Torej po izreku 11 sledi $A \preceq \mathcal{P}(A)$.

Zdaj pa pokažemo, da je $A \not\sim \mathcal{P}(A)$. Predpostavimo nasprotno. Potem obstaja bijekcija $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Za nekatere elemente $x \in A$ velja $x \in f(x)$, za nekatere pa $x \notin f(x)$. Združimo slednje v množico:

$$B = \{x \in A; x \notin f(x)\}.$$

Ker je f bijekcija, obstaja $b \in A$ tako, da je $f(b) = B$. Če poskusimo odgovoriti na vprašanje: Ali je $b \in B$? - pridemo v protislovje, ker

- če $b \in B$, potem $b \notin f(b) = B$;
- če $b \notin B$, potem $b \in f(b) = B$.

□

Zadnji izrek nam takoj implicira naslednjo posledico. Ta nam pove, da obstaja neomejeno mnogo neskončnih množic, ki so vse različnih kardinalnosti.

Posledica 14 *Velja*

$$\mathbb{N} \prec \mathcal{P}(\mathbb{N}) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))) \cdots$$

Hipoteza kontinuuma. *Ali je med $\aleph_0$ in $\mathbf{c}$ še kakšno kardinalno število?*

Nekaj uporabnih trditev in zgledov

Trditev 15 *Če je A neskončna in B števna je $A \cup B \sim A$.*

Trditev 16 *Če je A neskončna in B končna, potem je $A \setminus B \sim A$.*

Zgledi: Veljajo naslednje zveze:

- $(0,1) \sim (0,1] \sim [0,1) \sim [0,1]$.
- $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim [0,1]$ in $[0,1] \sim \mathbb{R}$. Od tod, $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R}$.
- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$.
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}^2 \sim \mathbb{N}^3 \cdots$
- Družina vseh *končnih* množic naravnih števil je števno neskončna.
- Družina sintaktično pravilnih programov v `Javi` je števno neskončna.