Predikatni račun [1] - vsebina

1. Domena in predikati;
2. Kvantifikatorji;
3. Sintaksa predikatnega računa;
4. Zaprte izjavne formule;
5. Interpretacija oz. semantika predikatnega računa;
6. Tavtologije ter enakovredne izjave;
7. Prenexna normalna oblika;
8. Sklepanje v predikatnem računu.

[1] (zadnji update 6. novembra)

Predikatni račun

Ali je spodnji sklep pravilen?

$$\begin{array}{ll} 1. & \text{Vsi zajci ljubijo korenje.} \\ 2. & \text{Feliks je zajec.} \\ \hline 3. & \text{Torej Feliks ljubi korenje.} \end{array}$$

Zgornji sklep se nam po občutku zdi pravilen, vendar ga v izjavnem računu prevedemo le takole:

$$\begin{array}{ll} 1. & p \\ 2. & q \\ \hline 3. & r \end{array}$$

ker nobena od izjav ne vsebuje veznikov. Izjavni sklep je očitno nepravilen za $p = q = 1$, $r = 0$.

Težava je v tem, da v izjavnem računu izgubimo zveze med izjavami oz. njihovo notranjo zgradbo:

- p in q govorita o "zajcih";
- q in r govorita o "Feliksu";
- p in r pa o "ljubezni do korenja";

V predikatnem računu to popravimo z upoštevanjem notranje zgradbe osnovnih izjav. Najprej označimo:

- $Z(x) \equiv x$ je zajec;
- $L(x) \equiv x$ ljubi korenje;
- $a \equiv$ Feliks;

Zdaj zgornji sklep zapišemo v obliki:

$$
\begin{array}{ll}
1. & \forall x : (Z(x) \Rightarrow L(x)) \\
2. & Z(a) \\
\hline
3. & L(a)
\end{array}
$$

V predikatnem računu je to pravilen sklep.

Nastopajoči simboli:

- Z, L sta enomestna **predikata**;
- x je **individualna spremenljivka**;
- a je **individualna konstanta**;
- $\forall$ je univerzalni **kvantifikator**.

Domena in predikati

Domena oz. **področje pogovora** $\mathcal{D}$ je neprazna množica, iz katere izbiramo individualne konstante oz. individue.

n-mestni predikat $P : \mathcal{D}^n \to \{0,1\}$ je n-mestna funkcija iz pogovornega področja $\mathcal{D}$, ki vsaki n-terici individuov priredi vrednost 1 (resnica) oz. 0 (neresnica).

Manj formalno: V izjavah predikati predstavljajo lastnosti oz. odnose med individui iz področja pogovora.

Če je P 1-mestni predikat potem predstavlja neko lastnost individuov iz področja pogovora.

Zgled: Naj bo $P(x)$ predikat "x je praštevilo", področje pogovora pa naj bo množica naravnih števil $\mathbb{N}$. Potem,

- $P(6) = 0\,;$
- $P(3) = 1\,.$

Če je P n-mestni predikat za $n \geq 2$, potem predstavlja relacijo oz. odnos med n individui iz področja pogovora. Tako za $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ rečemo, da so $a_1, a_2, \ldots, a_n$ v odnosu oz. relaciji P.

Zgled: Naj bo $V(x, y, z)$ predikat "x je vsota y in z", področje pogovora pa naj bo množica naravnih števil $\mathbb{N}$.

- $V(6, 3, 2) = 0\,;$
- $V(6, 4, 2) = 1\,.$

Kvantifikatorji

Poznamo dva kvantifikatorja: $\forall$ - univerzalni ter $\exists$ - eksistenčni.

$\forall x \;\equiv\;$ za vsak x,

$\exists x \;\equiv\;$ obstaja tak x, da

Ko hočemo poudariti, da je x iz področja pogovora $\mathcal{D}$, zapišemo:

$$\forall x \in \mathcal{D} \qquad \text{in} \qquad \exists x \in \mathcal{D}$$

Zgled: Naj bo $P(x)$ predikat "x je praštevilo", področje pogovora pa naj bodo naravna števila $\mathbb{N}$:

$\forall x : P(x)$	Vsako naravno število je praštevilo.
$\exists x : P(x)$	Vsaj eno naravno število je praštevilo.
$\forall x : \neg P(x)$	Nobeno naravno število ni praštevilo.
$\neg\exists x : P(x)$	Ni res, da obstaja vsaj eno praštevilo.
$\exists x : \neg P(x)$	Vsaj eno naravno število ni praštevilo.
$\neg\forall x : P(x)$	Ni res, da je vsako naravno število praštevilo.

Vprašanje 1 *Katere od zgornjih izjav povedo eno in isto?*

Še nekaj prevodov:

$S(x) \equiv x$ je študent; $U(x) \equiv x$ se uči;

Vsi študentje se učijo	$\forall x : (S(x) \Rightarrow U(x))$
Noben študent se ne uči	$\forall x : (S(x) \Rightarrow \neg U(x))$
Nekateri študentje se učijo	$\exists x : (S(x) \wedge U(x))$
Nekateri študentje se ne učijo	$\exists x : (S(x) \wedge \neg U(x))$

V splošnem si pomagamo z naslednjim obrazcem:

Vsi A so B	$\forall x : (A(x) \Rightarrow B(x))$
Noben A ni B	$\forall x : (A(x) \Rightarrow \neg B(x))$
Nekateri A so B	$\exists x : (A(x) \wedge B(x))$
Nekateri A niso B	$\exists x : (A(x) \wedge \neg B(x))$

Omejeni oz. pogojni kvantifikatorji. Pogosto imamo opraviti z več množicami oz. domenami hkrati. Zato je smiselno vpeljati:

- $\forall x \in A : P(x)$ pomeni $\forall x : (A(x) \Rightarrow P(x))$;
- $\exists x \in A : P(x)$ pomeni $\exists x : (A(x) \wedge P(x))$.

Zgornje prevode lahko zapišemo takole:

Vsi študentje se učijo	$\forall x \in S : U(x)$
Noben študent se ne uči	$\forall x \in S : \neg U(x)$
Nekateri študentje se učijo	$\exists x \in S : U(x)$
Nekateri študentje se ne učijo	$\exists x \in S : \neg U(x)$

Sintaksa predikatnega računa

Izjavni račun ne zadošča za analizo pravilnega sklepanja, zato jezik izjavnega računa razširimo.

Jezik 1. reda je določen z množico simbolov $\mathcal{S}$, množico termov $\mathcal{T}$ in množico izjavnih formul $\mathcal{F}$.

I. Simboli

Množico simbolov $\mathcal{S}$ sestavljajo:

1. **individualne spremenljivke:** $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$
2. **individualne konstante:** $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$
3. **predikati:** $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$
   So enomestni, dvomestni, itn.
4. **funkcijski simboli:** $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$
   So tudi enomestni, dvomestni, itn.
5. **izjavni vezniki:** $\neg$, $\wedge$, $\vee$, ...
6. **kvantifikatorja:** $\forall$ in $\exists$
7. **ločila:** ( ) : ,

II. Termi

Množica termov $\mathcal{T}$ je podana induktivno takole:

1. Vsaka individualna spremenljivka je term.
2. Vsaka individualna konstanta je term.
3. Če je f n-mestni funkcijski simbol in so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi, potem je $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term.

Zgled: x, a, 1, $f(a, x)$, $f(a, b)$, $x + 3$, $g(x, f(b, y))$ so termi.

Term je **zaprt**, če ne vsebuje individualnih spremenljivk.

Zgled: V zgornjem zgledu so zaprti termi le a, 1 in $f(a, b)$.

III. Izjavne formule

Množica izjavnih formul $\mathcal{F}$ je definirana induktivno takole:

1. Če je P neki n-mestni predikat in so $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi, potem je $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ izjavna formula.
2. Če sta Z in Y izjavni formuli, potem so tudi:

   $$\neg(Z),\ (Z) \wedge (Y),\ (Z) \vee (Y),\ (Z) \Rightarrow (Y), \ldots$$

   izjavne formule.
3. Če je Y formula in x individualna spremenljivka, potem sta

   $$(\forall x : Y) \qquad \text{in} \qquad (\exists x : Y)$$

   izjavni formuli.

Zgled: $P(x)$, $P(a)$, $Q(x, y)$, $\forall x : P(x)$, $\forall x : P(x) \wedge \forall y : Q(b, y)$ so izjavne formule.

Dogovor o prednosti in opuščanje ločil:

- Kvantifikatorji vežejo močneje kot izjavni vezniki;
- Dvopičje pred kvantifikatorjem opuščamo.

Zgledi:

- $\forall x\, \exists y : Q(x, y, z) \Rightarrow \exists y : P(y, z, x)$
- $\forall x\, \exists y : (Q(x, y, z) \Rightarrow \exists y : P(y, z, x))$

Doseg kvantifikatorjev

Območje delovanja ali **doseg** kvantifikatorja v izjavni formuli je najkrajše nadaljevanje za kvantifikatorjem, ki je samo zase izjavna formula.

Zgledi: :

$$\forall x : \underline{P(x)} \vee Q(x)$$

$$\forall x : \underline{(P(x, y) \Rightarrow \exists y : \underline{Q(y)})}$$

$$\forall x : \underline{(P(x) \wedge \exists x : \underline{Q(x, z)} \Rightarrow \exists y : \underline{R(x, y)})} \vee Q(x, y)$$

Zaprte izjavne formule oz. izjave

Nastop spremenljivke v izjavni formuli je **vezan**, če

- se nahaja tik za kvantifikatorjem; ali
- je v dosegu kvantifikatorja, ki se nanaša nanjo.

Sicer je nastop **prost**.

Zgledi:

$$\forall x : P(x) \vee Q(x)$$
$$\forall x : (P(x, y) \Rightarrow \exists y : Q(y))$$
$$\forall x : (P(x) \wedge \exists x : Q(x, z) \Rightarrow \exists y : R(x, y))$$

Izjavna formula je **zaprta**, če ne vsebuje prostih nastopov individualnih spremenljivk. Zaprti formuli rečemo **izjava**.

Zgledi: Naslednje izjavne formule so zaprte:

- $P(a)$
- $\exists x : P(x)$
- $\forall x \exists y : (P(x, y) \Rightarrow Q(y))$

Zapiranje izjavnih formul. Odprto izjavno formulo lahko zapremo tako, da:

- proste spremenljivke nadomestimo z individualnimi konstantami; ali
- formulo zapremo s kvantifikatorji.

Zgled: Naj bo $R(x,y)$ predikat "x ima rad y". Kot izjavna formula $R(x,y)$ ima dve prosti spremenljivki x,y in zato ni zaprta. Izjavno formulo zapremo na 8 načinov takole:

$\forall x\,\forall y : R(x,y)$	$\forall x$: x ima rad vsakogar. Vsi imajo radi vsakogar.
$\forall y\,\forall x : R(x,y)$	$\forall y$: vsakdo ima rad y. Vsi imajo radi vsakogar.
$\forall x\,\exists y : R(x,y)$	$\forall x$: x ima nekoga rad. Vsakdo ima koga (vsak svojega) rad.
$\forall y\,\exists x : R(x,y)$	$\forall y$: nekdo ima rad y. Vsakogar ima nekdo rad.
$\exists x\,\forall y : R(x,y)$	$\exists x$: x ima rad vse. Nekdo ima rad vse.
$\exists y\,\forall x : R(x,y)$	$\exists y$: vsi imajo radi y. Vsi imajo radi nekoga (vsi istega).
$\exists x\,\exists y : R(x,y)$	$\exists x$: x ima nekoga rad. Nekdo ima nekoga rad.
$\exists y\,\exists x : R(x,y)$	$\exists y$: nekdo ima rad y. Nekdo ima nekoga rad.

Semantika predikatnega računa

Interpretacijo $\mathcal{I}$ jezika 1. reda podamo takole:

1. Izberemo neprazno množico $\mathcal{D}_{\mathcal{I}}$. To je **domena interpretacije** oz. **področje pogovora**.

2. Za vsako individualno konstanto a izberemo neki element $a_{\mathcal{I}} \in \mathcal{D}_{\mathcal{I}}$.

3. Za vsak n-mestni predikat P izberemo neko n-mestno relacijo $P_{\mathcal{I}} \subseteq {\mathcal{D}_{\mathcal{I}}}^n$.

4. Za vsak n-mestni funkcijski simbol f izberemo neko n-členo operacijo $f_{\mathcal{I}} : {\mathcal{D}_{\mathcal{I}}}^n \to \mathcal{D}_{\mathcal{I}}$.

Opomba. V dani interpretaciji

- vsakemu zaprtemu termu ustreza določen element domene;

- vsaki zaprti izjavni formuli pa ustreza določena izjava o elementih domene, ki je lahko resnična oz. neresnična.

Zgled: Vzemimo izjavne formule $P(a)$, $\forall x : P(x)$, $P(f(a,b))$, kjer je P enomesten predikat.

Obravnavajmo naslednjo interpretacijo $\mathcal{I}$:

- $\mathcal{D}_{\mathcal{I}} = \mathbb{N}$
- $a_{\mathcal{I}} = 2$
- $b_{\mathcal{I}} = 3$
- $f_{\mathcal{I}}(x, y) = 2x + y$
- $P_{\mathcal{I}}(x) \equiv x$ je praštevilo.

Potem dobimo:

- $f_{\mathcal{I}}(a_{\mathcal{I}}, b_{\mathcal{I}}) = 2 \cdot 2 + 3 = 7$ je naravno število.
- $P_{\mathcal{I}}(a_{\mathcal{I}})$ je resnična izjava, ker je $a_{\mathcal{I}} = 2$ praštevilo.
- $\forall x : P_{\mathcal{I}}(x)$ je neresnična izjava.
- $P_{\mathcal{I}}(f_{\mathcal{I}}(a_{\mathcal{I}}, b_{\mathcal{I}})) = P_{\mathcal{I}}(7)$ je resnična izjava.

Opomba. Odslej bomo indeks $\mathcal{I}$ opuščali.

Zgled: Vzemimo izjavno formulo $\forall x \, \exists y : R(x,y)$ v različnih interpretacijah:

$\mathcal{I}_1$: $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $R(x,y) \equiv x > y$. Potem,

$\forall x \, \exists y : R(x,y) \equiv$ Za vsako naravno število obstaja manjše naravno število. (NI RES)

$\mathcal{I}_2$: $\mathcal{D} = \mathbb{Z}$ in $R(x,y) \equiv x > y$. Potem,

$\forall x \, \exists y : R(x,y) \equiv$ Za vsako celo število obstaja manjše celo število. (RES)

$\mathcal{I}_3$: $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $R(x,y) \equiv x < y$. Potem,

$\forall x \, \exists y : R(x,y) \equiv$ Za vsako naravno število obstaja večje naravno število. (RES)

$\mathcal{I}_4$: $\mathcal{D} = \{$ ljudje $\}$ in $R(x,y) \equiv x$ ima rad y-a. Potem,

$\forall x \, \exists y : R(x,y) \equiv$ Vsakdo ima koga rad. (Mogoče je RES, mogoče pa NI RES)

Opomba. Ista izjavna formula je lahko v eni interpretaciji resnična in v drugi neresnična.

Splošno veljavne izjave in enakovrednosti

Zaprta izjavna formula φ je **logično veljavna** (oz. **splošno veljavna**), če je resnična v vsaki interpretaciji. Pišemo $\models \varphi$.

Zgled: Velja

$$\models \forall x : P(x) \Rightarrow \neg \exists x : \neg P(x)\,.$$

Dokaz. Če imajo vsi objekti iz domene interpretacije $\mathcal{D}$ lastnost P, potem gotovo ne obstaja objekt iz $\mathcal{D}$, ki nima lastnosti $\mathcal{D}$. $\square$

Zaprti izjavni formuli φ_1 in φ_2 sta **enakovredni**, če sta v vsaki interpretaciji bodisi obe resnični bodisi obe neresnični. V tem primeru pišemo $\varphi_1 \sim \varphi_2$.

Trditev 1 *Naj bosta φ_1, φ_2 zaprti izjavni formuli. Potem je $\varphi_1 \sim \varphi_2$ natanko tedaj, ko je $\models \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$.*

Dokaz. Naj bo najprej $\varphi_1 \sim \varphi_2$. Vzemimo poljubno interpretacijo $\mathcal{I}$. V njej imata φ_1 in φ_2 enako resničnostno vrednost, torej je formula $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ splošno veljavna.

Naj bo zdaj $\models \varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ in $\mathcal{I}$ poljubna interpretacija. V njej je formula $\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$ resnična, torej imata φ_1 in φ_2 v $\mathcal{I}$ enako resničnostno vrednost. Ker je bila $\mathcal{I}$ poljubna, je $\varphi_1 \sim \varphi_2$. $\square$

- Kako pokažemo, da neka izjavna formula φ **ni** logično veljavna? – Poiščemo "protiprimer" tj. interpretacijo v kateri φ ni resnična.

- Kako pokažemo, da formuli φ_1 in φ_2 **nista** enakovredni? – Poiščemo "protiprimer" tj. interpretacijo, v kateri je ena resnična, druga pa ne.

Zgled: Pokaži $\forall x \exists y : P(x,y) \quad \not\sim \quad \exists y \forall x : P(x,y)$!

Protiprimer: Naj bosta $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $P(x,y) \;\equiv\; x \leq y$. Potem:

- $\forall x \exists y : x \leq y$ je resnična izjava (lahko vzamemo kar $y = x$).
- $\exists y \forall x : x \leq y$ trdi, da obstaja naravno število, ki je "največje". Zato je to neresnična izjava.

Zgled: Pokaži $\forall x : (P(x) \vee Q(x)) \quad \not\sim \quad \forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$!

Protiprimer: Naj bo $\mathcal{D} = \mathbb{N}$ in $P(x) \equiv x$ je sodo število, $Q(x) \equiv x$ je liho število. Potem:

- $\forall x : (P(x) \vee Q(x))$ trdi, da je vsako naravno število sodo ali liho. To je res!
- $\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)$ trdi, da so vsa naravna števila soda ali pa so vsa naravna števila liha. To pa ni res!

Zakoni predikatnega računa

V nadaljevanju si oglejmo nekaj tavtologij oz. enakovrednosti (urejenih glede na izjavne povezave):

1. Negacija. Veljata naslednji zvezi:

$$\neg\forall x : P(x) \ \sim\ \exists x : \neg P(x) \quad \text{in} \quad \neg\exists x : P(x) \ \sim\ \forall x : \neg P(x)$$

Tako sta kvantifikatorja $\forall$ in $\exists$ med seboj zamenljiva:

$$\forall x : P(x) \ \sim\ \neg\exists x : \neg P(x) \quad \text{in} \quad \exists x : P(x) \ \sim\ \neg\forall x : \neg P(x)$$

Zgled: Negacija izjave "*Vsi so pošteni*" ni "*Vsi so nepošteni*" ampak je "*Nekdo ni pošten*".

2. Konjunkcija. Tu veljata naslednji zvezi:

$$\forall x : (P(x) \wedge Q(x)) \quad \sim \quad \forall x : P(x) \wedge \forall x : Q(x)$$

$$\exists x : (P(x) \wedge Q(x)) \quad \Rightarrow \quad \exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x)$$

Naloga 1 *Pokaži, da naslednja implikacija ne velja:*

$$\exists x : P(x) \wedge \exists x : Q(x) \ \Rightarrow\ \exists x : (P(x) \wedge Q(x)) \,.$$

3. Disjunkcija. Tu veljata naslednji zvezi:

$$\exists x : P(x) \vee \exists x : Q(x) \quad \sim \quad \exists x : (P(x) \vee Q(x))$$

$$\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x : (P(x) \vee Q(x))\,.$$

Naloga 2 *Pokaži, da naslednja implikacija ne velja:*

$$\forall x : (P(x) \vee Q(x)) \;\Rightarrow\; \forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x)\,.$$

4. Implikacija. Tu veljata naslednji zvezi:

$$\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x))$$

$$\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\exists x : P(x) \Rightarrow \exists x : Q(x))\,.$$

5. Ekvivalenca. Splošno veljavna je naslednja izjava:

$$\forall x : (P(x) \Leftrightarrow Q(x)) \quad \Rightarrow \quad (\forall x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : Q(x))$$

Naloga 3 *Ugotovi ali sta splošno veljavni naslednji izjavi:*

$$\forall x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

$$\exists x : P(x) \Rightarrow \exists x : Q(x) \quad \Rightarrow \quad \forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))\,.$$

Še nekaj zakonov:

$$\begin{aligned}
\forall x \forall y : P(x,y) \quad &\sim \quad \forall y \forall x : P(x,y) \\
\exists x \exists y : P(x,y) \quad &\sim \quad \exists y \exists x : P(x,y) \\
\exists x \forall y : P(x,y) \quad &\Rightarrow \quad \forall y \exists x : P(x,y)
\end{aligned}$$

Naloga 4 *Ali je veljavna implikacija:*

$$\forall y \exists x : P(x,y) \ \Rightarrow \ \exists x \forall y : P(x,y)\,?$$

Splošnejša oblika predikatnih zakonov

Ko smo podali zakone predikatnega računa, smo se omejili na mestnost predikatov P in Q ter privzeli, da spremenljivki x, y nastopata v P in Q. Te omejitve lahko opustimo in dobimo spodnji seznam zakonov.

Za poljubne izjavne formule φ, ψ velja:

$$
\begin{array}{lrcl}
1. & \neg\forall x : \varphi & \sim & \exists x : \neg\varphi \\
2. & \neg\exists x : \varphi & \sim & \forall x : \neg\varphi \\
3. & \forall x\, \forall y : \varphi & \sim & \forall y\, \forall x : \varphi \\
4. & \exists x\, \exists y : \varphi & \sim & \exists y\, \exists x : \varphi \\
5. & \forall x : (\varphi \wedge \psi) & \sim & \forall x : \varphi \wedge \forall x : \psi \\
6. & \forall x : (\varphi \vee \psi) & \sim & \forall x : \varphi \vee \forall x : \psi\,.
\end{array}
$$

Če x ne nastopa prosto v φ, potem

$$
\begin{array}{lrcl}
7. & \varphi \vee \forall x : \psi & \sim & \forall x : (\varphi \vee \psi) \\
8. & \varphi \vee \exists x : \psi & \sim & \exists x : (\varphi \vee \psi)\,.
\end{array}
$$

Podobna zakona lahko zapišemo za $\wedge$.

Če je y nova spremenljivka oz. ne nastopa v $\varphi(x)$, potem

$$
\begin{array}{lrcl}
9. & \forall x : \varphi(x) & \sim & \forall y : \varphi(y) \\
10. & \exists x : \varphi(x) & \sim & \exists y : \varphi(y)
\end{array}
$$

Če x ne nastopa prosto v φ (opuščanje nepotrebnih kvantifikatorjev):

$$
11.\quad \forall x : \varphi \;\sim\; \varphi \qquad \text{in} \qquad 12.\quad \exists x : \varphi \;\sim\; \varphi.
$$

Prenexna normalna oblika

Izjavna formula $\mathcal{F}$ je v **prenexni normalni obliki**, če je oblike

$$\mathcal{F} \;=\; Q_1x_1\,Q_2x_2\,\cdots\,Q_nx_n:\;\mathcal{L},$$

kjer je vsak $Q_i \in \{\forall, \exists\}$ in je $\mathcal{L}$ formula, ki ne vsebuje kvantifikatorjev.

Zgled: Izjavna formula v prenexni normalni obliki:

$$\forall x\,\exists\,y\exists z:(P(x) \Rightarrow Q(x,y)\wedge R(a,z))\,.$$

Recept za preoblikovanje izjavne formule v prenexno normalno obliko:

1. Vse izjavne veznike nadomestimo z $\neg$, $\wedge$, $\vee$.
2. Vse negacije premaknemo na predikate (uporabimo De Morgana, negacija kvantificirane formule, $\wedge$).
3. Individualne spremenljivke preimenujemo tako, da:
   - nobena spremenljivka ne nastopa hkrati vezano in prosto;
   - nobena spremenljivka ne nastopa v več kot enem kvantifikatorju.
4. Uporabimo distributivnost kvantifikatorjev glede na $\wedge$ in $\vee$: če x ne nastopa prosto v φ, potem

   $$\varphi\vee\forall x:\psi\;\sim\;\forall x:(\varphi\vee\psi)\quad\text{in}\quad\varphi\vee\exists x:\psi\;\sim\;\exists x:(\varphi\vee\psi)\,.$$

   Podobne formule dobimo za $\wedge$.

Zgled: Zapiši izjavno formulo $\mathcal{F}$ v prenexni normalni obliki:

$$R(x,y) \Rightarrow \exists y : (P(y) \Rightarrow (\exists x : P(x) \Rightarrow Q(y)))$$

V 1. koraku $\mathcal{F}$ zapišemo takole:

$$\neg R(x,y) \vee \exists y : (\neg P(y) \vee (\neg \exists x : P(x) \vee Q(y))),$$

po 2. pa takole:

$$\neg R(x,y) \vee \exists y : (\neg P(y) \vee (\forall x : \neg P(x) \vee Q(y))),$$

v 3. koraku vpeljemo zamenjave $x \to u$ in $y \to v$ ter dobimo:

$$\neg R(x,y) \vee \exists v : (\neg P(v) \vee \forall u : \neg P(u) \vee Q(v)) \sim$$

$$\exists v : (\neg R(x,y) \vee \neg P(v) \vee \forall u : \neg P(u) \vee Q(v)) \sim$$

$$\exists v \forall u : (\neg(R(x,y) \wedge P(v) \wedge P(u)) \vee Q(v)).$$

Zaradi preglednosti lahko naredimo en korak več in zapišemo takole:

$$\exists v \forall u : (R(x,y) \wedge P(v) \wedge P(u) \Rightarrow Q(v))$$

Zgled: Zapiši izjave

$$\forall x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x)$$

in

$$\forall x : (P(x) \Rightarrow \forall y : (Q(x,y) \Rightarrow \neg\forall z : R(y,z)))$$

v prenexni normalni obliki.

Prvo izjavo uredimo takole:

$$\begin{aligned}
\forall x : P(x) \Rightarrow \forall x : Q(x) \quad &\sim \quad \neg\forall x : P(x) \vee \forall x : Q(x) \\
&\sim \quad \exists x : \neg P(x) \vee \forall y : Q(y) \\
&\sim \quad \exists x \forall y : (\neg P(x) \vee Q(y)) \\
&\sim \quad \exists x \forall y : (P(x) \Rightarrow Q(y))
\end{aligned}$$

Drugo izjavo pa takole:

$$\begin{aligned}
&\forall x : (P(x) \Rightarrow \forall y : (Q(x,y) \Rightarrow \neg\forall z : R(y,z))) && \sim \\
&\forall x : (\neg P(x) \vee \forall y : (\neg Q(x,y) \vee \exists z : \neg R(y,z))) && \sim \\
&\forall x \forall y : (\neg P(x) \vee \exists z : (\neg Q(x,y) \vee \neg R(y,z))) && \sim \\
&\forall x \forall y \exists z : (\neg P(x) \vee \neg Q(x,y) \vee \neg R(y,z))) && \sim \\
&\forall x \forall y \exists z : (P(x) \wedge Q(x,y) \Rightarrow \neg R(y,z))
\end{aligned}$$

Sklepanje v predikatnem računu

Sklep

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k \models \varphi$$

je **pravilen** (oz. **logično veljaven** ali **splošno veljaven**), če je v vsaki interpretaciji, v kateri so resnične vse predpostavke, resničen tudi zaključek.

Zgled: Pokaži, da je sklep

$$\begin{array}{ll}
\varphi_1. & \forall x : (P(x) \Rightarrow (\exists y : R(x,y) \Rightarrow \exists z : R(z,x))) \\
\varphi_2. & \forall x : (P(x) \land \exists z : R(z,x) \Rightarrow R(x,x)) \\
\varphi_3. & \neg \exists x : R(x,x) \\
\hline
\varphi. & \forall x : (P(x) \Rightarrow \forall y : \neg R(x,y))
\end{array}$$

pravilen.

Dokaz. Vzemimo $x_0 \in \mathcal{D}$ in predpostavimo, da velja $P(x_0)$. Iz φ_1 dobimo po (MP), da velja

$$\varphi_4. \qquad \exists y : R(x_0, y) \Rightarrow \exists z : R(z, x_0)\,.$$

Če bi veljalo $\exists z : R(z, x_0)$, bi iz φ_2 po (MP) dobili $R(x_0, x_0)$, kar pa je v protislovju s φ_3. Torej velja $\neg\exists z : R(z, x_0)$, kar nam skupaj s φ_4 po (MT) da $\neg\exists y : R(x_0, y)$ oziroma $\forall y : \neg R(x_0, y)$.

Povzemimo: iz predpostavke $P(x_0)$ smo izpeljali $\forall y : \neg R(x_0, y)$ in po (PS) velja

$$P(x_0, y) \Rightarrow \forall y : \neg R(x_0, y).$$

Ker pa je bil x_0 poljuben, velja torej

$$\forall x : (P(x) \Rightarrow \forall y : \neg R(x, y))\,.$$

$\square$

Zgled: Pokaži da spodnji sklep ni splošno veljaven.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1. & \text{Vsi gasilci so močni.} \\ \varphi_2. & \text{Nekateri gasilci so hrabri.} \\ \varphi_3. & \text{Nekateri močni ljudje niso gasilci.} \\ \hline \varphi. & \text{Torej, nekateri močni ljudje niso hrabri} \end{array}$$

Vpeljemo naslednje oznake:

- $G(x) \equiv x$ je gasilec;
- $M(x) \equiv x$ je močan;
- $H(x) \equiv$ je hraber;

Sklep zapišemo takole:

$$\begin{array}{ll} \varphi_1. & \forall x : (G(x) \Rightarrow M(x)) \\ \varphi_2. & \exists x : (G(x) \wedge H(x)) \\ \varphi_3. & \exists x : (M(x) \wedge \neg G(x)) \\ \hline \varphi. & \exists x : (M(x) \wedge \neg H(x)) \end{array}$$

Protiprimer: