Relacije

Naj bodo $A_1, A_2, \ldots, A_n$ neprazne množice ter naj bo $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$. Potem rečemo, da je R **n-mestna relacija**.

Če $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$, potem rečemo, da so elementi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **v relaciji** R.

Lahko definiramo ter uporabljamo **relacijo-predikat**

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad \equiv \quad (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R$$

Zgledi:

1. Naj bo $A = \{a, b, c, d\}$ ter $R = \{(a, b), (b, c), (c, a), (c, d)\}$. Potem je $R \subseteq A \times A$ 2-mestna relacija.

2. 3-mestna relacija-predikat:

$$S(x, y, z) \equiv x \text{ je otrok matere } y \text{ in očeta } z$$

3. Relaciji $<$ "manjši" ter $\leq$ "manjši ali enak" v $\mathbb{R}$

$$(<) = \{(x, y)\,;\; x, y \in \mathbb{R} \text{ ter } x < y\}$$

in

$$(\leq) = \{(x, y)\,;\; x, y \in \mathbb{R} \text{ ter } x \leq y\}$$

4. Relacija deli $|$ v $\mathbb{N}^+$, definirana kot:

$$a \mid b \quad \equiv \quad \exists k \in \mathbb{N}^+ : b = k \cdot a$$

5. Relacija vsebovanost $\subseteq$ v $\mathcal{P}(A)$.

Dvomestne oz. binarne relacije

Naj bo $R \subseteq A \times B$ dvomestna relacija. Rečemo, da je R relacija **iz** množice A **v** množico B. Uporabljamo tudi pisavo $a\,R\,b$, če $(a,b) \in R$.

Za $A = B$ rečemo, da je R relacija **na** množici A.

Domena oz. **definicijsko območje** relacije R je

$$\mathcal{D}_R = \{x \in A\,;\, \exists y \in B : x\,R\,y\}$$

Zaloga vrednosti relacije R je

$$\mathcal{R}_R = \{y \in B\,;\, \exists x \in A : x\,R\,y\}$$

Nekatere znane relacije:

- **polna** relacija $T_{A,B} = A \times B$
- **ničelna** relacija $\emptyset$
- **identitetna** relacija $I_A = \{(x,x) : x \in A\}$.

Graf relacije G_R

Naj bo A končna množica ter R relacija na A. Relacijo R grafično predstavimo tako, da:

1. za vsak element $a \in A$ izberemo točko v $\mathbb{R}^2$, to točko kar poimenujemo a;
2. za vsak par $(a, b) \in R$ narišemo usmerjeno povezavo iz točke a do točke b.

Tako risbo imenujemo **graf** relacije R ter ga označimo z G_R.

Zgled: Naj bo $A = \{a, b, c, d\}$ ter $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, a), (c, c), (c, d)\} \subseteq A \times A$. Graf G_R relacije R je:

Relacijska matrika M_R

Naj bo A končna množica ter R relacija na A. Vsakemu elementu iz A priredimo eno vrstico ter en stolpec matrike M_R tako, da v presečišču vrstice $a \in A$ ter stolpca $b \in A$ zapišemo 1, če je $a\,R\,b$, v nasprotnem primeru pa zapišemo 0, tj.

$$M_R[a,b] \;=\; \begin{cases} 1 & a\,R\,b; \\ 0 & \text{sicer.} \end{cases}$$

Matriko M_R imenujemo **relacijska matrika** relacije R.

Zgled: Naj bo $A = \{a, b, c, d\}$ ter $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, a), (c, c), (c, d)\} \subseteq A \times A$. Matrika M_R relacije R je:

Osnovne lastnosti binarnih relacij

1. R je **refleksivna**, če
$$\forall a \in A : a\,R\,a$$

2. R je **simetrična**, če:
$$\forall a, b \in A : (a\,R\,b \Rightarrow b\,R\,a)$$

3. R je **antisimetrična**, če:
$$\forall a, b \in A : (a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,a \;\Rightarrow\; a = b)$$

4. R je **tranzitivna**, če:
$$\forall a, b, c \in A : (a\,R\,b \;\wedge\; b\,R\,c \Rightarrow a\,R\,c)$$

Naloga 1 *Naj bo A neprazna množica. Ugotovi, katere od zgornjih lastnosti imata naslednji relaciji:*

- *relacija I_A;*
- *relacija $\subseteq$ na $\mathcal{P}(A)$.*

Druge lastnosti binarnih relacij

1. R je **irefleksivna**, če

$$\forall a \in A : \neg a\, R\, a$$

2. R je **asimetrična**, če:

$$\forall a, b \in A : (a\, R\, b \Rightarrow \neg b\, R\, a)$$

3. R je **itranzitivna**, če:

$$\forall a, b, c \in A : (a\, R\, b \text{ in } b\, R\, c \Rightarrow \neg a\, R\, c)$$

4. R je **sovisna**, če

$$\forall a, b \in A : (a \neq b \Rightarrow a\, R\, b \ \vee \ b\, R\, a)$$

5. R je **strogo sovisna**, če

$$\forall a, b \in A : (a\, R\, b \ \vee \ b\, R\, a)$$

6. R je **enolična**, če

$$\forall a, b, c \in A : (a\, R\, b \ \wedge \ a\, R\, c \Rightarrow \ b = c)$$

Naloga 2 *Za relaciji $<$ ter $\leq$ na $\mathbb{R}$ ugotovi, katere od zgornjih lastnosti veljajo.*

Operacije na relacijah

Naj bosta R, S relaciji iz A v B. Ker $R, S \subseteq A \times B$, lahko naravno definiramo **unijo**, **presek**, **razliko** in **simetrično razliko** na relacijah R in S:

$$R \cup S \qquad R \cap S \qquad R \setminus S \qquad R + S$$

Velja:

$$\begin{aligned}
x\, R \cup S\, y \quad &\Leftrightarrow \quad x\, R\, y \vee x\, S\, y \\
x\, R \cap S\, y \quad &\Leftrightarrow \quad x\, R\, y \wedge x\, S\, y \\
x\, R \setminus S\, y \quad &\Leftrightarrow \quad x\, R\, y \wedge \neg x\, S\, y \\
x\, R + S\, y \quad &\Leftrightarrow \quad x\, R\, y \oplus x\, S\, y
\end{aligned}$$

Komplement oz. **dopolnitev**:

$$R^c \; = \; (A \times B) \setminus R$$

Velja:

$$(R^c)^c \; = \; R\,.$$

Obratna oz. **inverzna** relacija $R^{-1} \subseteq B \times A$:

$$R^{-1} = \{(y, x); (x, y) \in R\}$$

Produkt relacij $R, S \subseteq A \times A$:

$$R * S = \{(x, y); \exists z \in A : (x, z) \in R \ \text{ in } \ (z, y) \in S\}$$

Velja:

$$\begin{aligned} x\,R\,y \quad &\Leftrightarrow \quad \neg x\,R^c\,y \\ x\,R\,y \quad &\Leftrightarrow \quad y\,R^{-1}\,x \\ x\,R*S\,y \quad &\Leftrightarrow \quad \exists z : (x\,R\,z \ \wedge \ z\,S\,y) \end{aligned}$$

Lastnosti operacij z relacijami

Naj bodo R, S, T relacije na A. Potem veljajo naslednje lastnosti:

1. $(R^{-1})^{-1} \; = \; R$

2. $(R \cup S)^{-1} \; = \; R^{-1} \cup S^{-1}$

3. $(R \cap S)^{-1} \; = \; R^{-1} \cap S^{-1}$

4. $(R * S)^{-1} \; = \; S^{-1} * R^{-1}$

5. $R * (S \cup T) \; = \; R * S \; \cup \; R * T$
   $(S \cup T) * R \; = \; S * R \; \cup \; T * R$

6. $(R * S) * T \; = \; R * (S * T)$

7. $R * I_A \; = \; I_A * R \; = \; R$

8. $R \subseteq S \quad \Rightarrow \quad R * T \; \subseteq \; S * T \quad \text{in} \quad T * R \; \subseteq \; T * S$

Algebraična karakterizacija lastnosti operacij

Naj bo R relacija na A. Potem velja:

1. R je refleksivna $\quad \Leftrightarrow \quad I_A \subseteq R$
2. R je irefleksivna $\quad \Leftrightarrow \quad R \cap I_A = \emptyset$
3. R je simetrična $\quad \Leftrightarrow \quad R = R^{-1}$
4. R je antisimetrična $\quad \Leftrightarrow \quad R \cap R^{-1} \subseteq I_A$
5. R je asimetrična $\quad \Leftrightarrow \quad R \cap R^{-1} = \emptyset$
6. R je tranzitivna $\quad \Leftrightarrow \quad R * R \subseteq R$
7. R je itranzitivna $\quad \Leftrightarrow \quad R * R \cap R = \emptyset$
8. R je sovisna $\quad \Leftrightarrow \quad R \cup R^{-1} \cup I_A = A \times A$
9. R je strogo sovisna $\quad \Leftrightarrow \quad R \cup R^{-1} = A \times A$
10. R je enolična $\quad \Leftrightarrow \quad R^{-1} * R \subseteq I_A$

Potence relacije

Potence relacije $R \subseteq A \times A$ definiramo takole:

- $R^0 = I_A$
- $R^{n+1} = R^n * R$

Velja:

$$\begin{aligned} R^n * R^m &= R^{n+m} \\ (R^n)^m &= R^{n\,m} \\ Q \subseteq R &\Rightarrow Q^n \subseteq R^n \end{aligned}$$

Grafovski pomen potence

Trditev 1 *Velja $a\,R^k\,b$ natanko takrat, ko v grafu G_R obstaja sprehod dolžine k iz točke a v točko b.*

Dokaz.

Negativne potence definiramo takole:

$$R^{-n} \equiv (R^{-1})^n, \quad \text{za } n > 0.$$

Opomba: Če sta m in n celi števili različnega predznaka, potem $R^n * R^m$ ni nujno enako R^{n+m}.

Zgled: Naj bo $A = \{a, b, c\}$ in $R = \{(a, c), (b, c)\} \subseteq A \times A$. Tedaj je $R^{-1} = \{(c, a), (c, b)\}$. Dobimo pa

$$R * R^{-1} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\} \neq I_A\,.$$

Relaciji R^+ in R^*

Definiramo relaciji:

$$R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

ter

$$R^* = I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$$

Velja:

$$\begin{aligned}
x\, R^+\, y \;&\sim\; \exists n \geq 1 : x\, R^n\, y \\
x\, R^*\, y \;&\sim\; \exists n \geq 0 : x\, R^n\, y \\
R^* \;&=\; I_A \cup R^+ \\
R^+ \;&=\; R * R^* \\
R^* \;&=\; R^* * R^*
\end{aligned}$$

Zgled: Naj bo $A = \{a, b, c, d\}$ ter $R = \{(a, b), (a, c), (b, c), (c, a), (c, c), (c, d)\} \subseteq A \times A$. Poišči R^+ in R^*.

Vprašanje 1 *Kako iz G_R konstruiramo grafa G_{R^+} in G_{R^*}?*

Zgled: Za relacijo R iz prejšnjega zgleda nariši G_{R^+} in G_{R^*}.

Naloga 3 *Pokaži:*

1. *Če je R tranzitivna relacija, potem $R = R^+$;*
2. *Če je R tranzitivna in refleksivna relacija, potem $R = R^*$.*

Ovojnice relacij

Naj bo $R \subseteq A \times A$ ter naj bo $\mathcal{L}$ neka relacijska lastnost. Relacija $R^{\mathcal{L}}$ je **ovojnica** relacije R **glede na** lastnost $\mathcal{L}$, če velja:

(O1). $R \subseteq R^{\mathcal{L}}$

(O2). $R^{\mathcal{L}}$ ima lastnost $\mathcal{L}$

(O3). Če ima relacija $S \subseteq A \times A$ lastnost $\mathcal{L}$ ter $R \subseteq S$, potem $R^{\mathcal{L}} \subseteq S$.

Izrek 2 *Relacija* $R^{\text{ref}} := I \cup R$ *je refleksivna ovojnica relacije* R*.*

Dokaz. Očitno $R \subseteq R^{\text{ref}}$ in $I \subseteq R^{\text{ref}}$, tj. veljata (O1) in (O2).

Pokažimo še lastnost (O3). Naj bo S refleksivna relacija, ki vsebuje R, tj. $I \subseteq S$ in $R \subseteq S$. Pokazati moramo, da je $R^{\text{ref}} \subseteq S$. To pa je očitno, ker $R^{\text{ref}} = I \cup R$ in $I \cup R \subseteq S$. $\square$

Izrek 3 *Relacija* $R^{\text{sim}} := R \cup R^{-1}$ *je simetrična ovojnica relacije* R.

Dokaz. Očitno $R \subseteq R^{\text{sim}}$, tj. velja (O1). Pokažimo lastnost (O2):

$$(R^{\text{sim}})^{-1} = (R \cup R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup (R^{-1})^{-1} = R^{-1} \cup R = R^{\text{sim}}.$$

Zdaj pa pokažimo še lastnost (O3). Naj bo S simetrična relacija, ki vsebuje R, tj. $S = S^{-1}$ in $R \subseteq S$. Pokazati moramo, da je $R^{\text{sim}} \subseteq S$. Velja $R^{-1} \subseteq S^{-1} = S$. Torej $R \cup R^{-1} \subseteq S$ od tod pa $R^{\text{sim}} \subseteq S$, kar je bilo treba dokazati. □

Izrek 4 *Dokaži, da je* R^+ *tranzitivna ovojnica relacije* R.

Dokaz. Ker je $R \subseteq R^+$, velja (O1). Pokažimo (O2), tj. da je R^+ tranzitivna:

$$R^+ \cup R^+ * R^+ = R^+ * (I \cup R^+) = R^+ * R^* = R * R^* * R^* = R * R^* = R^+$$

iz česar sledi, da je $R^+ * R^+ \subseteq R^+$, to pa je pogoj tranzitivnosti.

Preostane nam še lastnost $(O3)$. Recimo $Q \supseteq R$ in, da je Q tranzitivna. Torej $Q = Q^+$ (to smo že dokazali). Od tod pa

$$Q = Q^+ = (R \cup Q)^+ \supseteq R^+$$

iz česar sledi, da je $R^+ \subseteq Q$. □

Izrek 5 *Dokaži, da je R^* tranzitivna in refleksivna ovojnica relacije R.*

Dokaz. Ker je $R \subseteq R^*$, velja (O1). Pokažimo (O2), tj. da je R^* refleksivna in tranzitivna. Refleksivnost sledi iz $I \subseteq R$, tranzitivnost pa sledi iz $R^* * R^* = R^*$.

Preostane nam še lastnost $(O3)$. Recimo $Q \supseteq R$ in Q refleksivna ter tranzitivna. Torej $Q = Q^*$ (to smo že dokazali). Od tod pa

$$Q = Q^* = (R \cup Q)^* \supseteq R^*$$

iz česar sledi, da je $R^* \subseteq Q$. $\square$

Iz prejšnjih štirih izrekov velja:

- $R^{\text{refl}} = R \cup I_A$
- $R^{\text{sim}} = R \cup R^{-1}$
- $R^{\text{tranz}} = R^+ = R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$
- $R^{\text{refl+tranz}} = R^* = I_A \cup R \cup R^2 \cup R^3 \cup \cdots$

Ekvivalenčne relacije

Relacija $R \subseteq A \times A$ je **ekvivalenčna** oz. **enakovrednost**, če je

- refleksivna,
- simetrična in
- tranzitivna.

Naj bo R ekvivalenčna relacija na A ter naj bo $x \in A$

- $R[x] = \{y \in A; x\, R\, y\}$ je **ekvivalenčni razred** x-a ;
- $A/R = \{R[x]; x \in A\}$ je **faktorska** oz. **kvocientna množica**.

Naloga 4 *Pokaži, da je* $\equiv \pmod{12}$ *ekvivalenčna relacija v* $\mathbb{Z}$. *Kateri so ekvivalenčni razredi?*

Izrek 6 *Relacija R na A je enakovrednost natanko takrat, ko velja*

$$\mathcal{D}_R = A \quad \textit{in} \quad R^{-1} * R = R\,.$$

Dokaz. Recimo, da je R enakovrednost. Potem nam pogoj refleksivnosti $I_A \subseteq R$ zagotovi, da je $\mathcal{D}_R = A$. Iz simetričnosti ter tranzitivosti velja

$$R = R^{-1} \quad \text{in} \quad R^2 \subseteq R\,.$$

Od tod pa dobimo

$$R^{-1} * R = R * R = R * (I \cup R) = R * I \cup R^2 = R^2 \cup R = R\,.$$

Zdaj pa pokažimo v drugo smer. Obravnavajmo vse tri lastnosti posebej.

simetričnost: Lastnost pokažemo takole

$$R^{-1} = (R^{-1} * R)^{-1} = R^{-1} * (R^{-1})^{-1} = R^{-1} * R = R\,.$$

tranzitivnost: Iz pogoja simetričnosti $R^{-1} = R$ dobimo, da je $R^2 = R^{-1} * R = R$, kar nam zagotovi pogoj tranzitivnosti $R^2 \subseteq R$.

refleksivnost: Iz $\mathcal{D}_R = A$ sledi, da za vsak $x \in A$, obstaja $y \in A$ tako, da je $x\,R\,y$. Potem pa iz simetričnosti dobimo $y\,R\,x$. Od tu pa naprej po tranzitivnosti $x\,R\,x$, kar je lastnost refleksivnosti.

□

Trditev 7 *Naj bo R ekvivalenčna relacija na A ter naj bosta $x, y \in A$. Potem velja*

$$R[x] = R[y] \;\Leftrightarrow\; x\,R\,y$$

Dokaz. Iz $a\,R\,a$ sledi, da je $a \in R[a]$ za vsak $a \in A$. Torej, iz $R[x] = R[y]$ sledi, da je $y \in R[x]$ in od tod $x\,R\,y$.

Pokažimo obratno smer. Recimo $x\,R\,y$. Za poljuben element $a \in R[x]$ iz $y\,R\,x$ in $x\,R\,a$ po tranzitivnosti dobimo $y\,R\,a$, tj. $a \in R[y]$. To pa nam zagotovi $R[x] \subseteq R[y]$. Podobno lahko pokažemo, da je $R[y] \subseteq R[x]$. Od tod pa dobimo $R[x] = R[y]$. $\square$

Trditev 8 *Naj bo R ekvivalenčna relacija na A ter naj bosta $x, y \in A$, za katera velja $(x, y) \notin R$. Potem $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.*

Dokaz. Recimo da $a \in R[x] \cap R[y]$. Potem nam $x\,R\,a$ in $a\,R\,y$ po tranzitivnosti zagotovita, da je $x\,R\,y$, kar je narobe. $\square$

Spomnimo se:

$\mathcal{B} = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ je **razbitje** oz. **particija** množice A, če velja:

1. $\emptyset \subset B_i \subseteq A$
2. $B_i \cap B_j = \emptyset$ za $i \neq j$
3. $A = B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_k$.

Izrek 9 *Naj bo R ekvivalenčna relacija na A. Potem je faktorska množica R/A razbitje množice A.*

Dokaz. Očitno za vsak $a \in A$ velja $R[a] \subseteq A$, kar je prva lastnost razbitja. Iz refleksivnosti za vsak $a \in A$ velja $a\,R\,a$ in od tod $a \in R[a]$. Tako dobimo tretjo lastnost razbitja

$$\bigcup_{X \in A/R} = A\,.$$

Preostane nam pokazati še drugo lastnost, tj., da za poljubna različna $R[a]$ in $R[b]$ velja $R[a] \cap R[b] = \emptyset$. Iz $R[a] \neq R[b]$ po trditvi 7 sledi, da je $(a, b) \notin R$. Od tod pa po trditvi 8 sledi, da je $R[a] \cap R[b] = \emptyset$. $\square$

Izrek 10 *Naj bo $\mathcal{B} = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ razbitje množice A, potem je relacija:*

$$R = \{(a,b)\,;\, \exists i : a \in A_i \,\wedge\, b \in A_i\} \;=\; \bigcup_{i \in I} A_i \times A_i$$

enakovrednost.

Dokaz. Preverimo posebej vsako od lastnosti enakovrednosti.

refleksivnost:

simetričnost:

tranzitivnost: